

Kapillare Erscheinungen an einem horizontal hängenden Kreiszyylinder

Beitrag zur Theorie der Bügelmethode

Von B. Hartmann

(Mit 3 Abbildungen)

(Mitteilung aus dem Deutschen Amt für Maß und Gewicht, Ilmenau)

Inhaltsübersicht

Durch Integration der Differentialgleichung der durch einen unendlich langen horizontal hängenden Kreiszyylinder erzeugten Kapillarfläche wird die Meridiankurve der Oberfläche des kapillar gehobenen Flüssigkeitswulstes für einen beliebig großen Zylinderdurchmesser ohne irgendwelche Vernachlässigungen mit Hilfe des Tangentenwinkels als unabhängige Variable bestimmt in Kartesischen Koordinaten z und x als Funktionen der Oberflächenspannung der Flüssigkeit, des Randwinkels zwischen Flüssigkeitswulst und Zylinder und der „Wulstrandbreite“ φ am Zylinder, die abhängig ist vom Abstand der am tiefsten liegenden Erzeugenden des Zylindermantels vom Flüssigkeitsniveau. Für den Fall des bei eintretender Berührung von Zylinder und Flüssigkeit anspringenden Wulstes, des Wulstes von maximaler Masse und des Wulstes zu Beginn der Lamellenbildung wird auf Grund einer Auswertung der Gleichungen eine Meridiankurve gezeichnet.

Unter Verwertung des Ausdrucks für die vertikale Erhebung \tilde{z} der Flüssigkeit am Zylinder wird die Masse m des Flüssigkeitswulstes als Funktion von Oberflächenspannung, Randwinkel und Wulstrandbreite φ bestimmt ohne Vernachlässigungen. Die Gleichung $\frac{dm}{d\varphi} = 0$, die Bedingungsleichung dafür, daß die Wulstmasse das Maximum erreicht, kann zur Bestimmung von φ im Fall maximaler Wulstmasse dienen.

Die Gleichung für m und $\frac{dm}{d\varphi} = 0$ werden schließlich durch Übergehen zu kleinen Zylinderdurchmessern vereinfacht. So wird eine Formel für das Maximum der Wulstmasse gefunden, die — von Korrekturen wegen Randwirkungen abgesehen — mit der entsprechenden Formel der Bügelmethode übereinstimmen müßte. Durch Vergleichung von entsprechenden Formeln wird eine Beurteilung der Genauigkeit der von Lenard für die Bügelmethode gegebenen Bestimmungsgleichung für die Oberflächenspannung erreicht.

1. Zur Orientierung über die Untersuchung

Die „Bügelmethode“ zur Bestimmung der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten aus dem maximalen Gewicht der durch Kapillarität an einem horizontal hängenden geradlinigen Drahtstück gehobenen Flüssigkeitsmasse wurde von Lenard¹⁾ mit von Dallwitz-Wegener und Zachmann ausgearbeitet und zu Messungen benutzt von v. Dallwitz-Wegener²⁾ an Erdnußöl und Alkohol und von Zachmann³⁾ an Wasser. Nach Lenard geben die von Zachmann ermittelten Konstanten „die 3. Dezimalstelle mit geringem wahrscheinlichen Fehler“.

¹⁾ P. Lenard, Ann. Physik 74, 381–404 (1924). Vgl. auch G. Bakker, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 6, S. 153ff. und 212ff., Leipzig 1928.

²⁾ P. Lenard, a. a. O., S. 397 und 399.

³⁾ P. Lenard, a. a. O., S. 400.

Die Methode ist einer großen Verfeinerung fähig. Moser⁴⁾ und Schwenker⁵⁾ haben sie verfeinert und wie Zachmann zur Bestimmung der Oberflächenspannung von Wasser benutzt. Moser gibt als Meßgenauigkeit seiner ermittelten Konstanten bei Zimmertemperatur „mindestens $\pm 0,1$ “ Prozent an. Schwenker schätzt die Genauigkeit seiner Konstanten auf „mindestens 0,022“ Prozent, und auf Grund der großen Meßgenauigkeit, die er erreicht zu haben glaubt, zieht er mit Hilfe seiner Konstanten Schlüsse auf die Oberflächenbeschaffenheit wässriger verdünnter Lösungen. Dazu war eine Genauigkeit der Oberflächenspannung von mindestens 0,03% erforderlich. Keine der anderen Methoden⁶⁾ hat sich bisher einer so weitgehenden Verfeinerung fähig erwiesen.

Wenn jedoch die Bügelmethode den Anspruch erhebt, noch Hundertstelprozente der Oberflächenspannung zu erfassen, so bedarf ihre Theorie einer Ergänzung. Lenards Theorie berücksichtigt nur ungenügend Korrektionsgrößen 2. Ordnung, die die Hundertstelprozente beeinflussen. Sie behandelt ferner die Bügelmethode, als ob diese wie z. B. die Reflexionsmethode eine vollkommene Benetzung nicht verlangte, als ob vielmehr lediglich notwendig wäre, daß der Randwinkel zwischen Meßdraht und Flüssigkeit an allen Stellen den gleichen Wert hat, weil anderenfalls Gefahr bestehe, daß der Bügel schon vor Erreichen des Maximums der Wulstmasse abreiße. Lenards Theorie ignoriert, daß die am Meßdraht durch Kapillarität gehobene Flüssigkeitsmasse und zwar auch deren Maximalwert, der durch Wägung bestimmt wird, eine Funktion nicht allein der Oberflächenspannung sondern auch des Randwinkels ist. Wenn auch der Einfluß des Randwinkels auf die aus der Bestimmungsgleichung für die Oberflächenspannung zu berechnenden Werte, wie sich von vornherein beurteilen läßt, im Gegensatz zur Steighöhenmethode nicht von der 1. Ordnung ist, so ist doch eine Berechnung des Einflusses geboten, um dessen Größenordnung festzustellen.

Die vorliegende Untersuchung wird zeigen, daß in Lenards Formel zur Bestimmung der Oberflächenspannung ein Korrektionsglied 2. Ordnung vernachlässigt ist, während ein anderes Glied gleicher Ordnung berücksichtigt wird. Sie wird auch zeigen, daß in Anbetracht der erstrebten Meßgenauigkeit der von Lenard vernachlässigte Auftrieb der zur Justierung seiner Federwaage benutzten Gewichtstücke in Luft berücksichtigt werden muß. Es wird auch erkannt werden, daß Lenards Formel eine vollkommene Benetzung zwischen Meßdraht und Flüssigkeit zur Voraussetzung hat, daß sie z. B. bei einem Randwinkel von 7° bei den von Schwenker benutzten Meßdrahtdicken von 0,1 mm für die Oberflächenspannung von Wasser um etwa 0,02 Prozent und von Alkohol um 0,03 Prozent zu kleine Werte gibt.

An den vorliegenden nach der Bügelmethode bestimmten Werten der Oberflächenspannung wird jedoch, was den Randwinkel betrifft, ebenso wenig Kritik geübt werden, wie an den von Volkmann⁷⁾ und Domke⁸⁾ nach der Steighöhenmethode beobachteten Kritik geübt werden kann. „Der seltene Fall gesichert vollkommener Benetzung⁹⁾“, der vorliegen muß, wenn die Steighöhenmethode die

⁴⁾ H. Moser, Ann. Physik 82, 993 (1927).

⁵⁾ G. Schwenker, Ann. Physik 11, 525 (1931).

⁶⁾ Vgl. F. Kohlrausch, Prakt. Physik, 1943, Bd. 1, S. 102ff.

⁷⁾ P. Volkmann, Wied. Ann. 56, 457 (1895).

⁸⁾ J. Domke, Abhd. d. Kaiserl. Normal-Eichungskomm., Heft III, 1902.

⁹⁾ Vgl. P. Lenard, a. a. O., S. 383: „... Wo nicht der seltene Fall gesichert vollkommener Benetzung ($\omega = 0$) vorliegt, muß daher die Steighöhenmethode grundsätzlich verworfen werden“.

Oberflächenspannung messen soll, lag offenbar ebenso wie bei Volkmanns und Domkes Beobachtungen auch bei den Beobachtungen nach der Bügelmethode vor, so daß der der Theorie Lenards anhaftende Mangel, die Ignorierung des Randwinkels, die berechneten Werte der Oberflächenspannung nicht fehlerhaft machen konnte. Die Beobachter nach der Bügelmethode hielten anscheinend zwar eine gleichmäßige Benetzung für hinreichend, sie erreichten jedoch durch sorgfältige Reinigungsmaßnahmen eine vollkommene Benetzung, d. h. den Randwinkel 0° .

Die Untersuchung wird einen Kreiszyylinder von beliebigem Durchmesser betrachten und erst zum Schluß durch Übergehen zu kleinen Durchmessern die Gleichungen vereinfachen, so daß diese alsdann den von Moser und Schwenker benutzten Meßdrahtdicken von 0,1 mm entsprechen. Sie wird einen unendlich langen Kreiszyylinder voraussetzen, da zu Lenards Berücksichtigung der Rand- bzw. Rahmenwirkung seiner begrenzten Meßdrähte nichts hinzugefügt wird.

2. Die Aufgabe

Ein Kreiszyylinder von beliebig großer Dicke wird horizontal hängend, d. h. mit der am tiefsten liegenden Erzeugenden des Zylindermantels, mit der an die Luft grenzenden Oberfläche einer vollkommen oder unvollkommen benetzenden Flüssigkeit in Berührung gebracht, so daß ein Flüssigkeitswulst an den Zylinder anspringt. Bei festgehaltenem Zylinder wird durch allmähliches Senken der Flüssigkeit der Abstand zwischen Flüssigkeitsspiegel und Zylinder allmählich vergrößert. Der bei eintretender Berührung an den Zylinder anspringende Flüssigkeitswulst ist außer von dem Durchmesser des Zylinders von der Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Luft und ihrem Randwinkel gegen den Zylinder abhängig; er erleidet beim Senken der Flüssigkeit Veränderungen der Gestalt und des Volumens.

Gestalt und Masse des Wulstes sollen untersucht werden im Hinblick auf die Verwertung zur Bestimmung der Oberflächenspannung. Das Gefäß, worin sich die Flüssigkeit befindet, sei so weit, daß die Betrachtung voraussetzen darf, der Flüssigkeitsspiegel sei trotz des an der Gefäßwand sich bildenden Flüssigkeitswulstes eben und seine Niveauhöhe würde durch die am Zylinder durch Kapillarität gehobene Flüssigkeit nicht geändert. Der Zylinder sei so lang, daß die Wirkung der Zylinderenden auf den Flüssigkeitswulst vernachlässigt werden darf.

3. Bestimmung der Meridiankurve der Wulstoberfläche

Die Mantelfläche des unendlich langen horizontal hängenden Kreiszyinders ist eine Fläche mit parallelen horizontalen Erzeugenden. Daher muß nach Symmetrie die Kapillarfläche, die Oberfläche des durch Kapillarität gehobenen Flüssigkeitswulstes, eine zylindrische Fläche mit parallelen horizontalen Erzeugenden sein. Wählt man ein Kartesisches Koordinatensystem, dessen eine Achse im Flüssigkeitsspiegel liegt und auf der Vertikalebene durch die Zylinderachse senkrecht steht, während die andere Achse in dieser Vertikalebene liegt und auf dem Flüssigkeitsspiegel senkrecht steht, so darf die Betrachtung an die Meridiankurven angeknüpft werden, die von dieser Koordinatenebene aus der Oberfläche des Zylinders und der Oberfläche des Flüssigkeitswulstes ausgeschnitten werden.

Die im Flüssigkeitsspiegel liegende Achse des Koordinatensystems sei X -Achse, die dazu senkrecht stehende Z -Achse. Die X -Achse werde nach rechts, die Z -Achse nach oben positiv gerechnet. Aus der Meridiankurve für positive Koor-

dinaten x erhält man durch Spiegelung an der Z -Achse die Meridiankurve für negative x . Daher soll die Betrachtung auf die Seite der positiven X -Achse beschränkt werden.

τ [1°] bezeichnet (vgl. die Abbildungen 1–3) den Tangentenwinkel der Meridiankurve der Wulstoberfläche und zwar den Winkel zwischen der positiven X -Achse und der positiven Richtung der Tangente an die Meridiankurve im Punkt (z, x) . Der Winkel τ wird negativ gerechnet werden bei Beschreibung im Sinne der Uhrzeigerbewegung, ausgehend von der positiven X -Achse. Zur Festlegung der positiven Richtung der Tangente wird für Punkte der Meridiankurve mit positiver x -Koordinate vorgeschrieben:

$$-\pi \leq \tau \leq 0 \text{ für } x > 0, \quad (1)$$

so daß zur Meridiankurve auf der Seite der positiven X -Achse negative Winkel τ gehören.

Alsdann gilt für den Tangentenwinkel τ wie üblich die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \tau \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} \cdot \operatorname{ctg} \tau, \quad (2)$$

und die Differentialgleichung der Kapillarfläche kann auf die Form gebracht werden

$$\frac{2}{c^2} \cdot z \cdot \frac{dz}{d\tau} = \sin \tau, \quad (3)$$

wenn c die Länge bezeichnet

$$c = \sqrt{\frac{2\gamma}{g(\varrho - \varrho')}}, \quad (4)$$

unter γ [mt^{-2}] die Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Luft, unter g [lt^{-2}] die Schwerkraftbeschleunigung und unter ϱ bzw. ϱ' die Dichte der Flüssigkeit bzw. der Luft verstanden. Durch Einführung der Größe

$$\alpha [ml^{-1}]^{10} = \frac{\gamma}{g}, \quad (5)$$

so daß der Zahlenwert von α , gemessen in $\frac{mg}{mm}$, gleich dem Zahlenwert von γ im technischen Maßsystem ist, wenn γ in $\frac{mp}{mm}$ ¹¹⁾ gemessen wird, kann die Konstante c definiert werden durch

$$c = \sqrt{\frac{2\alpha}{\varrho - \varrho'}^{12)}}. \quad (6)$$

Um das Problem vollständig zu definieren, müssen zur Differentialgleichung (3) noch die Grenzbedingungen für die Wulstoberfläche im Unendlichen und an der Mantelfläche des Zylinders kommen.

Zur Veranschaulichung der Wulstveränderungen beim Senken des Flüssigkeitsspiegels können die Abbildungen 1 bis 3 dienen, die auf Grund einzelner Ergebnisse der Theorie gezeichnet sind. Die Abbildungen stellen Meridiankurven von Wulstoberflächen dar und zwar Abb. 1 im Augenblick des Anspringens des Wulstes an den Zylinder, Abb. 2 beim Erreichen der maximalen Masse des Wulstes und Abb. 3 bei Berührung der beiden Teile der Wulstoberfläche. Es bezeichnen darin b , s , l und l_1 Längen [vgl. Anmerkung ¹⁴⁾], und zwar b den Zylinderdurchmesser, s die Wulstrandsehne, d. h. die Sehne des kreisförmigen Meridianschnittes

¹⁰⁾ Vgl. die Deutung der Größe α in Anmerkung ¹⁶⁾ zur Gl. (13).

¹¹⁾ mp ist die Abkürzung für Millipond und bedeutet Milligramm-Kraft (vgl. F. Kohlrausch, a. a. O., Bd. 1, S. 4 unter „Gewicht“).

¹²⁾ Vgl. die Deutung der Größe c in Anmerkung ¹²⁾ zur Gl. (11).

der Zylindermantelfläche zwischen den beiden Punkten B_1 und B_2 des Wulstrandes, l den Abstand der am tiefsten liegenden Erzeugenden des Zylindermantels, die von der Meridianebene im Punkt A geschnitten wird, vom Flüssigkeitsniveau und l_1 den Abstand der Wulstrandsehne $B_1 B_2$ von der am tiefsten liegenden Er-

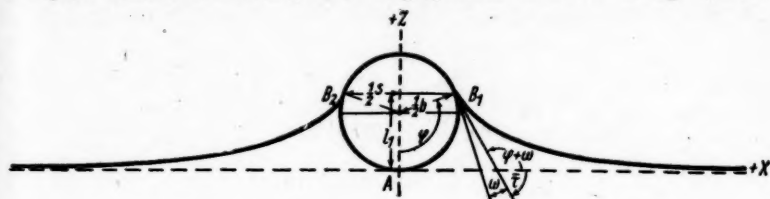


Abb. 1. Meridiankurve der Oberfläche des anspringenden Wulstes für $\frac{b}{c} = 1,0538$ und einen Randwinkel von 10°

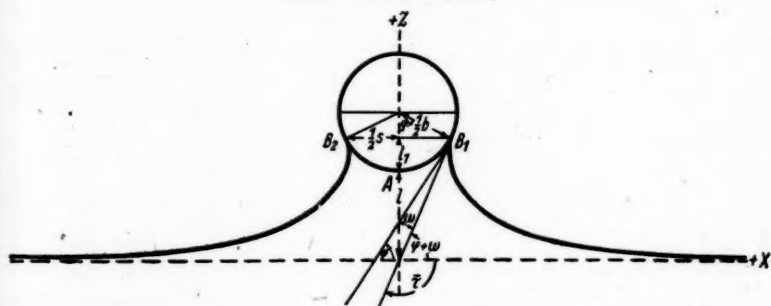


Abb. 2. Meridiankurve der Wulstoberfläche bei maximaler Masse des Wulstes für $\frac{b}{c} = 1,0538$ und einen Randwinkel von 10°

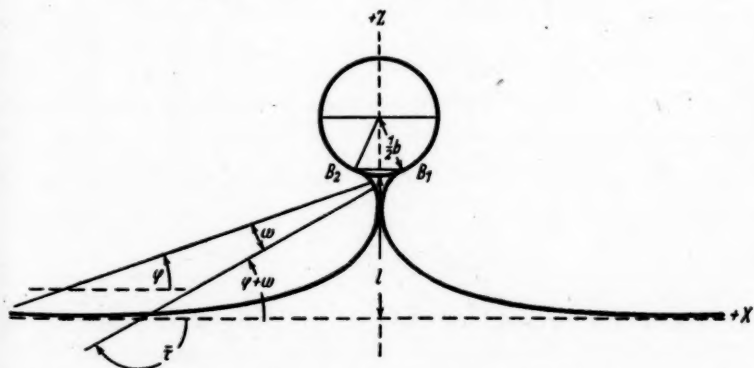


Abb. 3. Meridiankurve der Wulstoberfläche bei eintretender Berührung ihrer beiden Teile für $\frac{b}{c} = 1,0538$ und einen Randwinkel von 10°

zeugenden des Zylindermantels, d. h. vom Punkt A . Es bezeichnen $\bar{\tau}$, ω und φ Winkel [$^\circ$] und zwar $\bar{\tau}$ den Seite 362 definierten Tangentenwinkel τ am Wulstrand, ω den Randwinkel zwischen dem Kreiszyylinder und der Wulstoberfläche, d. h. den Winkel zwischen der Tangente an den Meridianschnitt der Zylindermantelfläche und der Tangente an die Meridiankurve der Wulstoberfläche im Wulstrandpunkt B_1 , dessen Bereich auf das Intervall $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist, φ die Wulstrandbreite, d. h. den Winkel, den der Radius des Meridianschnittes zu dem Wulstrandpunkt B_1 auf der positiven Seite der X -Achse mit dem vertikal nach unten liegenden Radius bildet, so daß der Winkel φ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$ liegt und die Beziehungen bestehen

$$s = b \sin \varphi, \quad (7)$$

$$l_1 = \frac{1}{2} b (1 - \cos \varphi). \quad (8)$$

Zwischen $\bar{\tau}$, ω und φ besteht, wie die Abbildungen bei Berücksichtigung, daß $\bar{\tau}$ nach (1) negativ zu rechnen ist, erkennen lassen, die Beziehung

$$\bar{\tau} = \varphi + \omega - \pi, \quad (9)$$

und die Grenzbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} x = +\infty & \quad \tau = 0, \quad z = 0 \\ x = +\frac{1}{2}s & \quad \bar{\tau} = \varphi + \omega - \pi \text{ für } \omega = \text{konst.} \end{aligned} \quad (10)$$

Die Integration von (3) in Verbindung mit (2) unter Berücksichtigung von (10) und (7) liefert

$$\frac{z}{c} = -\sqrt{2} \sin \frac{\tau}{2} \quad (11)$$

$$\frac{x}{c} - \frac{1}{2} \frac{b}{c} \sin \varphi = -\sqrt{2} \left(\cos \frac{\tau}{2} - \sin \frac{\varphi + \omega}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \ln \frac{\operatorname{ctg} \frac{\tau}{4}}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi + \omega}{4} - \frac{\pi}{4} \right)}. \quad (12)$$

(11) und (12) stellen die Meridiankurven der Oberfläche des Flüssigkeitswulstes dar, so daß diese für gegebene Werte $\frac{b}{c}$, ω und φ in Koordinaten $\frac{z}{c}$, $\frac{x}{c}$ gezeichnet werden können¹⁴⁾, und in diesen Koordinaten für verschiedene Flüssigkeiten

¹³⁾ Die Gleichung (11) vermittelt eine Deutung der Länge $c = \sqrt{\frac{2\alpha}{\varrho - \varrho'}}$ (vgl. (6)).

Für $\bar{\tau} = -\frac{\pi}{2}$, somit nach (9) für $\varphi + \omega = \frac{\pi}{2}$, wird $z = c$. Daher hat c die Bedeutung der Steighöhe am Zylinder in dem Zustand des Wulstes, in dem die in einem Punkte des Wulstrand an die Meridiankurve gelegte Tangente senkrecht steht. Wenn an die Stelle des horizontal hängenden Kreiszylinders eine senkrecht hängende Platte gesetzt wird, so führt die analoge Überlegung zu der Deutung: $c = \sqrt{\frac{2\alpha}{\varrho - \varrho'}}$ ist die Steighöhe der Flüssigkeit an der Platte für $\bar{\tau} = -\frac{\pi}{2}$ und bei vollkommener Benetzung ($\omega = 0$) die Steighöhe des anspringenden Wulstes.

¹⁴⁾ Die Abb. 1, 2, 3 wurden so gezeichnet für $\frac{b}{c} = 1,0538$, d. h. die Längen b , s , l , l_1 der Figuren haben als Längeneinheit c . Als Randwinkel wurde 10° gewählt. Herr Dr. E. Padelt zeichnete die Abbildungen nach Auswertung der Gl. (14) für $l = 0$, (16) und (17). Ein Wert $\frac{b}{c} < 1,0538$ führt zu einer entsprechenden Abbildung 1, 2, 3 mit einem entsprechend größeren Winkel φ .

und verschiedene Zylinder bei dem gleichen Wert $\frac{b}{c}$ lediglich infolge des Einflusses des Randwinkels ω voneinander abweichen.

4. Bestimmung der am Kreiszyylinder über das Flüssigkeitsniveau hinaus gehobenen Flüssigkeitsmasse

Es bezeichnen L die Länge des Zylinders, V das über das Flüssigkeitsniveau hinaus gehobene Flüssigkeitsvolumen und m dessen Masse.

Man kann das Volumen folgendermaßen zusammensetzen (vgl. die Abbildungen 1 bis 3):

$$V^{15)} = L s (l + l_1) + 2 L \int_{x=+\frac{1}{2}s}^{x=+\infty} z dx - \text{Volumen des Zylindersegments mit der}$$

Wulstrandsehn s .

Da in V unter dem Integral nach (3) und (2) das vollständige Differential

$$z dx = \frac{1}{2} c^2 d \sin \tau$$

steht, so erhält $m = V \cdot \rho$ nach (10) mit Hilfe von (7) und (8) den Ausdruck

$$m = -L c^2 \rho \sin \bar{\tau}^{16)} + L b \rho (l + \frac{1}{2} b) \sin \varphi - \frac{1}{8} L b^2 \rho \sin 2\varphi - \frac{1}{4} L b^2 \rho \cdot \varphi. \quad (13)$$

¹⁵⁾ Das erste Glied stellt das am Zylindersegment hängende, um die Höhe $l + l_1$ über das Flüssigkeitsniveau hinausgehobene 1. Teilvolumen der Flüssigkeit dar, das zwischen den beiden parallel der Zylinderachse durch B_1 und B_2 gelegten Vertikalebenen $x = \pm \frac{1}{2} s$ liegt, jedoch ohne Berücksichtigung, daß für $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ das Zylindersegment

ganz und für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ teilweise in diesem Teilvolumen liegt, und ohne Berücksichtigung, daß gegebenenfalls durch eine Einschnürung der Wulstoberfläche ein Teil der Flüssigkeit aus dem Volumen $L s (l + l_1)$ verdrängt wird. Das zweite Glied stellt das 2. Teilvolumen der Flüssigkeit dar, das sich vom Unendlichen bis zu den beiden Vertikalebenen $x = \pm \frac{1}{2} s$ erstreckt, gegebenenfalls vermindert um das Volumen der bei einer Einschnürung der Wulstoberfläche aus dem 1. Teilvolumen verdrängten Flüssigkeit, jedoch ohne Berücksichtigung, daß für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ der nicht im ersten Teilvolumen liegende Teil des Zylindersegments im 2. Teilvolumen liegt. Das 3. Glied berücksichtigt, daß das Zylindersegment in dem von der Summe des ersten und zweiten Gliedes dargestellten Volumen liegt.

¹⁶⁾ Das das 2. Teilvolumen der gehobenen Flüssigkeit darstellende Integral $V' = 2 L \int_{x=+\frac{1}{2}s}^{x=+\infty} z dx = -L c^2 \sin \bar{\tau}$ vermittelt, da nach (6) $c^2 = \frac{2\alpha}{\rho - \rho'}$ ist, eine Deutung der Größe α . Für $\bar{\tau} = -\frac{\pi}{2}$, d. h. nach (9) für $\varphi + \omega = \frac{\pi}{2}$, gilt $\alpha = \frac{V' \rho}{2 L} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$.

Somit ist α der Quotient $\alpha = \frac{m_0}{\text{Längeneinheit}}$, wenn m_0 die an der Längeneinheit der Be-

rührungslinie von Kreiszyylinder und Flüssigkeit beim Tangentenwinkel $\bar{\tau} = -\frac{\pi}{2}$ gehobene, außerhalb der Vertikalebenen $x = \pm \frac{1}{2} s$ liegende Flüssigkeitsmasse, vermindert um die Masse der verdrängten Luft, ist. Wird an die Stelle des horizontal hängenden Kreiszyinders eine senkrecht hängende Platte gesetzt, so führt die analoge Überlegung zu der anschaulichen Deutung: α ist der Quotient $\frac{m}{\text{Längeneinheit}}$, wenn m die an die Längeneinheit der Berührungslinie von Platte und Flüssigkeit bei vollkommener Benetzung ($\omega = 0$) anspringende Wulstmasse, vermindert um die Masse der verdrängten Luft, ist.

Die in (13) stehende Größe l darf als Funktion von φ aufgefaßt werden. Wie die Abb. 2 erkennen läßt, gilt für einen beliebigen Abstand l zwischen Zylinder und Flüssigkeitsniveau, wenn die Wulstrandhöhe mit \bar{z} bezeichnet wird,

$$l = \bar{z} - \frac{1}{2}b(1 - \cos \varphi)$$

und daher, da nach (11) und (9) $\bar{z} = c \sqrt{2 \cos \frac{\varphi + \omega}{2}}$ ist,

$$\frac{l}{c} = \sqrt{2 \cos \frac{\varphi + \omega}{2}} - \frac{1}{2} \frac{b}{c} (1 - \cos \varphi). \quad (14)$$

Mit Hilfe von (14) und (9) erhält man aus (13) für einen beliebigen Abstand l die Wulstmasse m als Funktion des Zylinderdurchmessers b , des Randwinkels ω und der Wulstrandbreite φ , und zwar wird

$$\frac{m}{Lc^2 \varrho} = \sin(\varphi + \omega) + \sqrt{2} \frac{b}{c} \sin \varphi \cos \frac{\varphi + \omega}{2} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{c^2} (2\varphi - \sin 2\varphi). \quad (15)$$

Um (15) für einen bestimmten Abstand l zu verwerten, ist neben gegebenen Werten b und ω der zu l gehörende Winkel φ erforderlich. Z. B. ist φ für den anspringenden Wulst (Abb. 1) aus (14) für $l = 0$ zu berechnen. Für den Zustand der Berührung der beiden Wulstflächenteile (Abb. 3), bei deren Eintritt die aus (12) zu berechnende Einschnürung auf der positiven Seite der X -Achse, nämlich $-(x - \frac{1}{2}s)$ für $\tau = -\frac{\pi}{2}$, gleich $\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}b \sin \varphi$ wird, lautet die Gleichung für φ

$$\frac{1}{2} \frac{b}{c} \sin \varphi = 1 - \sqrt{2 \sin \frac{\varphi + \omega}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{2 \ln \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega}{4})}}. \quad (16)$$

Für das Maximum der Wulstmasse (Abb. 2) ist φ aus $\frac{dm}{d\varphi} = 0$, somit nach (14) aus $\frac{dm}{d\varphi} = 0$ zu berechnen, d. h. nach (15) aus

$$\cos(\varphi + \omega) + \sqrt{2} \frac{b}{c} \left(\cos \varphi \cos \frac{\varphi + \omega}{2} - \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi + \omega}{2} \right) - \frac{1}{4} \frac{b^2}{c^2} (1 - \cos 2\varphi) = 0. \quad (17)$$

(15) und (17) sind die zur Berechnung von $\alpha = \frac{1}{2}c^2(\varrho - \varrho')$ geeigneten Gleichungen, wenn die Wulstmasse m im Zustand des Maximums und der Zylinderdurchmesser b experimentell bestimmt und der Randwinkel ω als bekannt vorausgesetzt wird. Es liegt zwar der Gedanke nahe, den Abstand l des Zylinders vom Flüssigkeitsniveau durch mikrometrische Schraubung zu bestimmen und aus (15), (17) und (14) die Größen φ , ω und α zu berechnen. Aber zu diesem Zweck wird (14) nicht zu verwerten sein, weil die gehobene Flüssigkeitsmasse als Funktion von l ein flaches Maximum hat, so daß die Meßgenauigkeit von l nicht ausreicht.

5. Die Berechnung von α aus der maximalen Wulstmasse.

Die vom Randwinkel hervorgerufene Unsicherheit in α

Bei kleinen Werten $\frac{b}{c}$ wird das Maximum der Wulstmasse nach (17) für einen Winkel $\varphi + \omega$ erreicht, der nahe bei $\frac{\pi}{2}$ liegt. Für solche Werte darf man den Ansatz machen

$$\varphi + \omega = \frac{\pi}{2} - \vartheta, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - (\omega + \vartheta) \quad (18)$$

und fordern, daß ϑ von der gleichen Größenordnung wie $\frac{b}{c}$ sei. Durch Einsetzen von (18) in (17) folgt bei Beschränkung auf lineare Glieder in $\frac{b}{c}$:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{b}{c} (\cos \omega - 2 \sin \omega), \quad (19)$$

und mit Hilfe von (18) und (19) folgt aus (15), genau auf Größen 2. Ordnung in $\frac{b}{c}$,

$$\frac{m}{L c^2 \varrho} = 1 + \frac{b}{c} \cos \omega - \frac{1}{16} \frac{b^2}{c^2} (2\pi - 4\omega - 5 + 3 \cos 2\omega + 2 \sin 2\omega). \quad (20)$$

Somit lautet wegen (6) die Bestimmungsgleichung für $\alpha = \frac{\gamma}{g}$

$$\alpha = \left[\frac{m}{2L} - \frac{1}{2} b c \varrho \cos \omega + \frac{1}{32} b^2 \varrho (2\pi - 4\omega - 5 + 3 \cos 2\omega + 2 \sin 2\omega) \right] \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho} \right). \quad (21)$$

Bei vollkommener Benetzung ($\omega = 0$) gehen (19), (20) und (21) über in:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{b}{c}, \quad (22)$$

$$\frac{m}{L c^2 \varrho} = 1 + \frac{b}{c} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{c^2} (\pi - 1), \quad (23)$$

$$\alpha = \left[\frac{m}{2L} - \frac{1}{2} b c \varrho + \frac{1}{16} b^2 \varrho (\pi - 1) \right] \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho} \right). \quad (24)$$

Wird bei der experimentellen Bestimmung der Wulstmasse nicht durch sorgfältige Reinigungsmaßnahmen für eine gleichmäßige Benetzung des Meßdrahtes gesorgt, so besteht die Gefahr, daß der Draht vor Erreichen des Maximalwertes der Wulstmasse abreißt. Wenn bei gleichmäßiger, jedoch nicht vollkommener Benetzung der Maximalwert erreicht wird, so führt (24) zu einem Wert α_0 , der die aus (21) und (24) sich ergebende Korrektur erfordert:

$$\alpha - \alpha_0 = \left\{ \frac{1}{2} b c \varrho (1 - \cos \omega) - \frac{1}{32} b^2 \varrho [3(1 - \cos 2\omega) + 2(2\omega - \sin 2\omega)] \right\} \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho} \right). \quad (25)$$

Bei Zugrundelegen der folgenden Werte für $c = \sqrt{\frac{2\alpha}{\varrho - \varrho'}}$, für

Wasser von 18° : $c = 3,86$, berechnet aus $\alpha = 7,43^{17}$ und $\varrho - \varrho' = 0,9974$,

Alkohol von 23° : $c = 2,41$, berechnet aus $\alpha = 2,34^{18}$ und $\varrho - \varrho' = 0,805^{18}$,

ergeben sich nach (25) für Meßdrahtdicken von 0,1 und 0,03 mm bei Randwinkeln von 7° und 15° folgende Werte der Korrekturen $\alpha - \alpha_0$:

		bei einem Randwinkel von			
		7°		15°	
		mg · mm ⁻¹	Prozent	mg · mm ⁻¹	Prozent
für $b = 0,1$ mm und	Wasser	+0,0014	+0,019	+0,006	+0,09
	Alkohol	+0,0007	+0,030	+0,003	+0,14
für $b = 0,03$ mm und	Wasser	+0,0004	+0,006	+0,002	+0,03
	Alkohol	+0,0002	+0,009	+0,001	+0,04

¹⁷⁾ Nach H. Moser, a. a. O. S. 998.

¹⁸⁾ Nach P. Lenard, a. a. O. S. 399.

Unter der Voraussetzung, daß beim Experiment das Maximum der Wulstmasse überhaupt erreicht wird, stellen die Korrekturen (25) — und deren Beträge (26) für besondere Fälle — die Unsicherheit dar, die den aus der beobachteten Wulstmasse berechneten Werten α anhaften kann, wenn beim Experiment nicht durch sorgfältige Reinigungsmaßnahmen für vollkommene Benetzung ($\omega = 0$) gesorgt wird. Die Unsicherheit in α kann für Meßdrahtdicken von 0,1 mm, wenn ein Randwinkel von 15° nicht ausgeschlossen ist, noch ungefähr 0,1 Prozent bei Wasser und ungefähr 0,15 Prozent bei Alkohol betragen. Ohne Zweifel vermeiden die vorliegenden Beobachtungen nach der Bügelmethode dank der erreichten Reinheit der Oberflächen solche großen Randwinkel. Ist ein Randwinkel von 7° nicht ausgeschlossen, so beträgt die Unsicherheit bei Meßdrähten von 0,1 mm Dicke für Wasser noch 0,02 Prozent und für Alkohol noch 0,03 Prozent und erreicht somit nahezu die von Schwenker angegebene „Genauigkeit“ seiner Werte der Oberflächenspannung für Wasser. Wenn noch Hundertstelprozente der Oberflächenspannung erfaßt werden sollen, so ist es angebracht, diese Unsicherheit noch auf ungefähr $\frac{1}{3}$ zu vermindern dadurch, daß man Meßdrähte von 0,03 mm anstatt 0,1 mm Dicke benutzt. Auch Meßdrahtdicken von 0,03 mm liegen noch in dem von Lenard empfohlenen Dickenintervall.

6. Über Lenards Gleichung zur Bestimmung der Oberflächenspannung für dünne Meßdrähte

Lenards Gleichung (5)¹⁹, die für Meßdrahtdicken $b = 0,1$ mm aufgestellt ist, und die von Zachmann, Moser und Schwenker benutzt wurde, müßte, da sie den Randwinkel unberücksichtigt läßt, übereinstimmen mit der Gleichung (24). Beim Vergleichen beider Formeln ist davon abzusehen, daß in Lenards Gleichung die Meniskuswirkung an seinem Rahmendraht durch ein Glied, das in seiner Bezeichnungsweise $+\frac{2r\alpha}{l}$ lautet, berücksichtigt ist. Dieses Glied kann in der Gleichung (24) nicht vorkommen, da diese einen unendlich langen Zylinder voraussetzt (vgl. Abschnitt 1, letzten Satz).

In Lenards Gleichung (5), auf die auch seine Gleichungen (5') und (5'') zurückgehen, bezeichnen P'' und P' die „Resultate“ zweier Wägungen mit der benutzten Federwaage mit und ohne Flüssigkeitswulst am Meßdraht. Die Federwaage wurde mit Gewichten justiert. Eine Wägung mit ihr erfordert, wenn Genauigkeit erstrebt wird, wie bei einer anderen Waage eine Reduktion auf den leeren Raum. Offensichtlich ist eine solche Reduktion unterblieben²⁰). Wenn die Dichte der zur Justierung der Federwaage benutzten Gewichtstücke mit ϱ'' bezeichnet wird und m , ϱ , ϱ' die bisherige Bedeutung haben, so gilt bei Berücksichtigung des Luftauftriebs des Flüssigkeitswulstes und der Gewichtstücke zahlenmäßig²¹)

$$P'' - P' = m \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{\varrho''}{\varrho'} \right).$$

¹⁹) P. Lenard, a. a. O., S. 395.

²⁰) Nirgends ist erwähnt, daß P'' und P' wegen des Luftauftriebs der zur Justierung benutzten Gewichtstücke oder der Gewichtstücke und des Flüssigkeitswulstes reduzierte Wägungsergebnisse seien. Vielmehr schreibt Moser (a. a. O., S. 1004), P'' sei die Ablesung an der Waage. Daraus muß geschlossen werden, daß keinesfalls der Auftrieb des Wulstes berücksichtigt wurde. Bei Nichtberücksichtigung des Wulstauftriebs wäre jedoch eine Berücksichtigung des Auftriebs der Gewichtstücke keinesfalls unerwähnt geblieben.

²¹) Lenard rechnet nicht mit Masse, sondern mit Gewicht.

Somit lautet Lenards Gleichung (5), abgesehen von seinem die Meniskuswirkung am Randwinkel berücksichtigenden Glied, in den Bezeichnungen der Gleichung (24), wenn kleine Glieder 3. Ordnung weggelassen werden,

$$^* \alpha_{Ld} = \frac{m}{2L} \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{\varrho''}{\varrho} \right) - \frac{1}{2} b c \varrho + \frac{1}{4} b c \varrho' + \frac{1}{16} b^2 \varrho \pi. \quad (27)$$

Der Index Ld soll auf Lenards Ausdruck für α hindeuten. Aus (24) und (27) folgt, genau auf Größen 2. Ordnung, für die an α_{Ld} anzubringende Korrektur, da darin $\frac{m}{2L} = \alpha + \frac{1}{2} b c \varrho$ gesetzt werden darf,

$$\alpha - \alpha_{Ld} = - \left(\alpha + \frac{1}{2} b c \varrho \right) \frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{1}{4} b c \varrho' - \frac{1}{16} b^2 \varrho.$$

Für Meßdrähte von der Dicke $b = 0,1$ mm bei Justierung der Federwaage mit Gewichtstücken von der Dichte $\varrho'' = 8,4$ erreicht diese Gesamtkorrektur folgende Beträge:

	mg · mm ⁻¹	Prozent von α
für Wasser	— 0,0016	— 0,021
für Alkohol	— 0,0008	— 0,033

Sie erreicht somit für Wasser fast genau die von Schwenker angegebene „Genauigkeit“ 0,022 Prozent seiner Werte α .

Die Korrektur $\alpha - \alpha_{Ld}$ wird erforderlich infolge des in Lenards Gleichung (5) fehlenden Gliedes $-\frac{1}{16} b^2 \varrho$ und im übrigen in der Hauptsache infolge Vernachlässigung des Luftauftriebs der zur Justierung der Federwaage benutzten Gewichtstücke. Die Korrektur wegen des fehlenden Gliedes $-\frac{1}{16} b^2 \varrho$ beträgt für sich in Prozenten von α für Wasser — 0,008 und für Alkohol — 0,021, die übrige Korrektur für Wasser — 0,013 und für Alkohol — 0,012 Prozent.

²²⁾ Das Glied $-\frac{1}{16} b^2 \varrho$ berücksichtigt die Abweichung der Wulstrandbreite φ von $\frac{\pi}{2}$ um $-\theta = -\frac{1}{2} \frac{b}{c}$, und zwar stellt es die Summe der Wirkungen dar, die θ für $\omega = 0$ in (15) auf das Hauptglied $\sin(\varphi + \omega)$ und auf das sogenannte hydrostatische Glied $\sqrt{2} \frac{b}{c} \sin \varphi \cos \frac{\varphi + \omega}{2}$ hat. Das Glied muß in Lenards Gleichung (5) fehlen, weil darin die Korrekturen soweit eingeschränkt sind, daß die Einschränkung der Voraussetzung gleichkommt, das Maximum der Wulstmasse finde bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ statt.

Lenards Gleichungen (2) und (4), wovon (2) in das Handbuch der Experimentalphysik von W. Wien und F. Harms, Bd. 6, Kapillarität und Oberflächenspannung von G. Bakker, S. 155, übernommen ist, sind insofern nicht richtig, als sie zwar den Einfluß seiner Größe x , die mit dem Winkel θ durch die Beziehung $x = \frac{1}{2} \theta$ verknüpft ist, auf das hydrostatische Glied berücksichtigen, jedoch den Einfluß von x^2 auf das Hauptglied seiner Gleichung (1) vernachlässigen. Bei Berücksichtigung der Korrektur auch im Hauptglied würde die Gesamtkorrektur auf die Hälfte der in (2) und (4) angegebenen Korrektur reduziert werden. Übrigens ist in Lenards Berechnung des Ausdrucks für x (vgl. a. a. O. S. 392, auch (2) und (4)), ein Rechenfehler unterlaufen. Der Nenner des Wertes für x muß lauten $l(2a + 5r)$ anstatt $2l(a + 2r)$. Der Fehler ist dadurch zu erklären, daß bei der Berechnung von x in der Bestimmungsgleichung Glieder mit x^2 und höheren Potenzen von x vernachlässigt wurden, ohne daß vorher der allen Gliedern der Gleichung gemeinsame Faktor $1 + x$ durch Division beseitigt worden ist. Der Rechenfehler gewinnt jedoch erst für $2r > 0,5$ mm Einfluß auf x .

Lenards Vernachlässigung des Luftauftriebs des Flüssigkeitswulstes, die für Wasser eine Korrektur von nahezu +0,12 Prozent von α erfordert, wird bis auf eine Größe höherer Ordnung ausgeglichen durch die außerdem vorgenommene Vernachlässigung der Dichte ρ' der Luft in der zwischen α und c nach (6) bestehenden Beziehung $\alpha = \frac{1}{2} c^2 \rho \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$, die für Wasser eine Korrektur von nahezu -0,12 Prozent erfordert²³⁾. So ist es zu erklären, daß Lenards Formel unter der Voraussetzung einer vollkommenen Benetzung des Meßdrahtes und bei Berücksichtigung des fehlenden Gliedes $-\frac{1}{16} b^2 \rho$ trotz Nichtberücksichtigung des Luftauftriebs des Wasserwulstes bis auf eine wegen Nichtberücksichtigung des Luftauftriebs der Gewichtstücke erforderliche Korrektur von -0,013 Prozent die Oberflächenspannung von Wasser gegen Luft, die sog. wirklichen Werte²⁴⁾ $\alpha = \frac{\gamma}{g}$, liefert.

7. Ergebnis

1. Der nach der Bügelmethode bestimmte Wert der maximalen Wulstmasse ist in 2. Ordnung eine Funktion des Randwinkels zwischen Flüssigkeit und Meßdraht, so daß die nach Lenards Formeln bestimmte Oberflächenspannung in 2. Ordnung unsicher wird, wenn beim Experiment nicht vollkommene Benetzung ($\omega = 0$) erreicht wird. Bei einem Randwinkel von z. B. 7° würde der unter der Voraussetzung vollkommener Benetzung, im übrigen jedoch einwandfrei berechnete Wert der Oberflächenspannung bei Meßdrahtdicken von 0,1 mm der Korrektur bedürfen:

+ 0,019 Prozent für Wasser und + 0,030 Prozent für Alkohol.

2. Lenards Formel (5), nach der bei Verwendung von Meßdrähten von 0,1 mm Dicke gerechnet wurde, gibt für solche Meßdrähte wegen Vernachlässigung eines kleinen Gliedes 2. Ordnung und wegen Nichtberücksichtigung des Luftauftriebs der zur Justierung der Federwaage benutzten Gewichtstücke den Wert der Oberflächenspannung für Wasser um 0,02 Prozent und für Alkohol um 0,03 Prozent zu hoch. —

Im übrigen kann das Urteil über die Bügelmethode folgendermaßen zusammengefaßt werden: Begnügt man sich wie Moser mit einer Meßgenauigkeit von 0,1 Prozent der Oberflächenspannung, so genügt für Meßdrähte von 0,1 mm Dicke Lenards Gleichung (5) zur Bestimmung der Konstanten. Erstrebt man jedoch eine größere Genauigkeit als 0,1 Prozent, z. B. wie Schwenker mindestens 0,03 Prozent, so muß Lenards Gleichung durch vorstehende Gleichung (21) bzw. unter der Voraussetzung vollkommener Benetzung durch (24) ersetzt werden. Da vollkommene Benetzung im allgemeinen nicht erreicht wird, ist es dann angebracht, Meßdrähte von 0,03 anstatt 0,1 mm Dicke zu benutzen. Der Luftauftrieb der zur Justierung der Federwaage benutzten Gewichtstücke muß berücksichtigt werden, wenn Fehler von der Größenordnung 0,01 Prozent nicht ignoriert werden dürfen.

²³⁾ Vgl. die Deutung der Größe α in der Anmerkung ¹⁶⁾ zu Gleichung (13).

²⁴⁾ Vgl. P. Volkmann, a. a. O., S. 482, vgl. auch H. Moser, a. a. O., S. 1010.

Ilmenau, Zweigstelle des Deutschen Amtes für Maß und Gewicht.

(Bei der Redaktion eingegangen am 20. Januar 1949.)

Druck- und Temperaturverschiebung der Absorptionskante von Cadmiumsulfid

Von G. Höhler

(Mit 4 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Im ersten Teil der Arbeit wird ein Versuch beschrieben, aus dem sich eine Verschiebung der Absorptionskante von Cadmiumsulfid bei isothermer Kompression um $0,01 \text{ \AA}$ pro atm ergibt. Die Diskussion im zweiten Teil behandelt den allgemeineren Fall der Kantenverschiebung bei Temperaturänderung. Es wird versucht zu zeigen, daß sowohl die Stoßverbreiterung als auch die Verschiebung der Bandränder durch thermische Ausdehnung zu diesem Effekt beitragen. Für CdS verhalten sich die Anteile wie 4:1.

Einleitung

Die Absorptionskonstante von CdS zeigt als Funktion der Wellenlänge den für Isolatoren charakteristischen Verlauf. An die Reststrahlenabsorption im Ultrarot schließt sich ein Gebiet der Durchlässigkeit an. Im Sichtbaren bei etwa 6000 \AA beginnt die Absorptionskonstante wieder langsam anzusteigen¹⁾. Die Breite dieser Ausläuferabsorption ist keine Materialkonstante, sondern weitgehend von den Herstellungsbedingungen der Kristalle abhängig. Sie variiert daher von Kristall zu Kristall beträchtlich. Bei 5120 \AA hat sie den Wert 10 mm^{-1} erreicht. Hier, an der „Kante“ der Grundgitterabsorption, beginnt nun ein steiler Anstieg. Schon bei 4500 \AA beträgt die Absorptionskonstante 10^4 mm^{-1} und bei 2500 \AA nimmt sie mit $5 \cdot 10^4 \text{ mm}^{-1}$ annähernd konstante Werte an. Diese Ergebnisse hat Mollwo²⁾ an dünnen Aufdampfschichten erhalten. Einkristalle³⁾, CdS-Schichten nach Weiss⁴⁾ oder auch Pulver⁵⁾ zeigen in der Nähe der oben genannten Kante innerhalb einiger hundert \AA ein Absinken der Durchlässigkeit zu sehr kleinen Werten. Der Verlauf dieser Kurven hängt natürlich noch von der Dicke der durchstrahlten Schicht ab. Diese Kurven und — wie man folgert — auch die Kante verschoben sich mit steigender Temperatur um etwa 1 \AA pro Grad nach längeren Wellen²⁾). Da nach dem Bändermodell des festen Körpers beim CdS die Absorption an der Kante dem Übergang vom oberen Rand des Valenzbandes zum unteren Rand des Leitfähigkeitsbandes entspricht, gibt die Frequenz der Kante also direkt die Breite der verbotenen Zone. Beobachtet wird eine Verminderung dieser Breite mit wachsender Temperatur. Möglich und Rompe⁶⁾

¹⁾ J. Fassbender, Ann. Physik, im Erscheinen.

²⁾ E. Mollwo, Reichsberichte für Physik **1**, 1 (1944).

³⁾ R. Seiwert, Bisher unveröffentlicht.

⁴⁾ K. Weiss, Z. Naturforschung **2a**, 650 (1947).

⁵⁾ F. A. Kröger, Physica **7**, 1 (1940).

⁶⁾ F. Möglich u. R. Rompe, Z. Physik **119**, 472 (1942).

führen diese Verschiebung der Bandränder auf die Veränderung der Gitterkonstanten infolge thermischer Ausdehnung zurück. Sie weisen jedoch zusammen mit Riehl⁷⁾ darauf hin, daß auch eine Verbreiterung der unteren Terme des Leit-

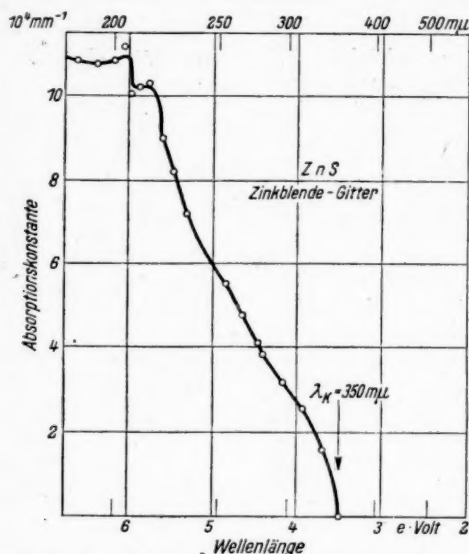


Abb. 1. Absorptionskonstante von ZnS nach Mollwo. Eine Röntgenstrukturuntersuchung ergab ein Zinkblendegitter

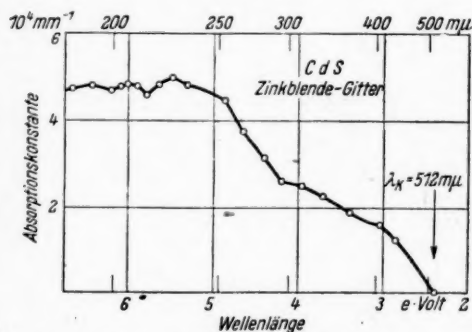


Abb. 2. Absorptionskonstante von CdS nach Mollwo

der Anteil der Temperaturverschiebung berechnen, der auf die Änderung der Gitterkonstanten zurückzuführen ist. Da es weder auf Absolutwerte der Absorp-

tion... Bes... für... Ant... der... alle... Qu... klar... die... dien... erfo... auf... Pro... tet... der... vor... CuS... den... gela... Für... eine... weil... Kar... Agf... met... fahr... sich... Die... von... wur... zu... und... wur... tive... pers... Die... mit... man...

fähigkeitsbandes infolge thermischer Stöße zu einer Rotverschiebung der Kante führen könnte. Allerdings gelang es erst Radkowsky⁸⁾, der dieses Problem eingehend quantenmechanisch durchgerechnet hat, anzugeben, durch welchen Mechanismus sich die Aufenthaltsdauer des Elektrons schon bei tieferen Temperaturen genügend verkürzt. Möglich, Riehl und Rompe hatten sich auf hohe Temperaturen beschränkt, bei denen dies durch die Vielfachstöße allein bewirkt wird.

Das Ziel dieser Arbeit ist eine Untersuchung darüber, ob die Änderung der Gitterkonstanten für die Verschiebung der Kante wesentlich ist oder ob man den durch sie bewirkten Effekt als klein vernachlässigen kann, wie es Radkowsky behauptet. Zu diesem Zweck wird die Verschiebung der Absorptionskante in Abhängigkeit vom Druck gemessen, wobei dafür gesorgt wurde, daß die Temperatur konstant bleibt. Allerdings liegen die Kompressibilitäten der festen Substanzen zumeist 1-2 Größenordnungen unter den thermischen Ausdehnungskoeffizienten, so daß die zu erwartenden Druckverschiebungen höchstens 0,1 bis 0,01 Å pro atm betragen. Aus der Größe der Druckverschiebung läßt sich natürlich leicht

⁷⁾ F. Möglich, N. Riehl u. R. Rompe, Z. techn. Physik **21**, 128 (1940).

⁸⁾ A. Radkowsky, Physic. Rev. **73**, 749 (1948).

tion noch auf den genaueren Verlauf ankommt, genügt eine photographische Bestimmung der Durchlässigkeit des Kristalls als Funktion der Wellenlänge.

Als Ergebnis der Untersuchungen möchten wir die Behauptung aufstellen, daß für CdS, das wohl teilweise als Ionenkristall anzusehen ist, der Radkowskysche Anteil mit $\frac{1}{5}$ des Gesamtverschiebungsbetrages angesetzt werden darf, während der Möglich-Rompesche Mechanismus $\frac{1}{5}$ der Verschiebung bestreitet. Es kann allerdings keinem Zweifel unterliegen, daß bei nicht polaren Kristallen, wie etwa Quarz oder Diamant, der Möglich-Rompesche Mechanismus überwiegt.

I. Versuchsanordnung

Der Kristall befindet sich zwischen den Fenstern einer Druckkammer, die mit klarem Ricinusöl gefüllt ist. Die Kammer ist an eine Apparatur angeschlossen, die früher zum Eichen von Manometern nach dem Differentialkolbenprinzip diente und erlaubt, Öldrucke bis zu 500 atm zu erzeugen. Die Messung des Drucks erfolgte mit einem Präzisionsmanometer auf $\pm 1\%$. Der Kristall wurde mit einer Projektionsglühlampe (250 W) beleuchtet. Um seine Erwärmung während der Belichtung klein zu halten, wurden vor dem Fenster ein Gelbfilter und eine CuSO_4 -Küvette angebracht. Das durch den Kristall hindurchgegangene Licht gelangte dann in den Spektrographen. Für das Vergleichsspektrum erwies sich eine Cd-Metall dampflampe als geeignet, weil die grüne Cd-Linie gerade an der Kante liegt. Für die Aufnahmen fanden Agfa-Isochromplatten Verwendung. Die Ausmessung erfolgte mit einem Denso-meter von Schmidt und Hänsch mit Selenphotoelement und Galvanometer.

Die CdS-Einkristalle wurden von Herrn Dr. Fassbender nach einem Verfahren hergestellt, das dem von Frerichs⁹⁾ beschriebenen ähnlich ist. Es handelt sich um Plättchen der Fläche 0,8 mm mal 2 mm und der Dicke von etwa $\frac{1}{100}$ mm. Die Fläche stand senkrecht zum Strahlengang. Eine noch erkennbare Struktur von Parallelstreifen senkrecht zur Richtung größter Wachstumsgeschwindigkeit wurde parallel zum Spektrographenspalt gestellt, um möglichst konstante Dicke zu haben. Der leicht zerbrechliche Kristall befand sich in einem Kristallhalter und war zwischen zwei Zelluloidplättchen eingeklemmt. Der Spektrograph wurde mit zwei Prismen (SF1, Basis 8 cm und F2, Basis 7 cm) und zwei Objektiven (1:10, 54 cm) behelfsmäßig zusammengestellt. Bei 5000 Å betrug die Dispersion 29 Å/mm, zwei Fe-Linien im Abstand 0,8 Å erschienen deutlich getrennt. Die Fenster der Druckkammer bestanden aus Plexiglasscheiben der Dicke 5 mm mit einem Durchmesser von 12 mm. Durch Anziehen der Verschraubung konnte man bis zu etwa 400 atm eine ausreichende Abdichtung erreichen.

II. Die Messung

Die Lampe, die den Kristall während der ganzen Messung beleuchtet, wird eingeschaltet und der Druck langsam auf 400 atm gepumpt. Nach einer Stunde ist

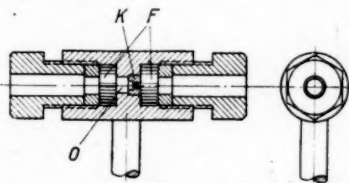


Abb. 3. Die Druckkammer. K Kristallhalter, F Fenster, O Öl.

In der Zeichnung fehlt die Bohrung, durch die O mit der Pumpe in Verbindung steht

⁹⁾ R. Frerichs, Physic. Rev. 72, 594 (1947).

der Druck auf 300 atm gesunken und die Temperatur, die durch Kompression und Beleuchtung eine merkliche Beeinflussung erfahren hat, ist konstant geworden. Nun wird der Druck langsam gesenkt und das Spektrum photographiert, bis der Druck Null erreicht ist. Die später zu vergleichenden Aufnahmen werden dicht übereinander auf derselben Platte gemacht.

Da bereits 1 Grad Temperaturänderung 1 Å Verschiebung ergibt, muß auf Temperaturkonstanz sorgfältig geachtet werden. Bei dem oben beschriebenen Meßverfahren könnte höchstens noch die Abkühlung bei der Entspannung stören, denn Kontrollversuche bei konstantem Druck zu verschiedenen Zeiten ergaben

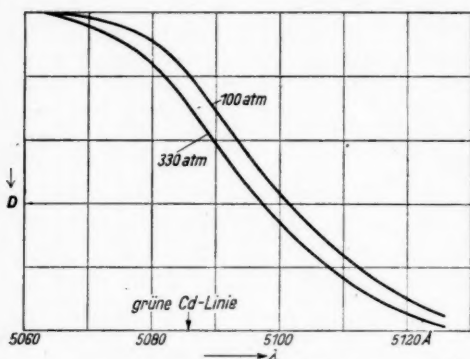


Abb. 4. Durchlässigkeit von CdS in willkürlichen Einheiten als Funktion der Wellenlänge bei verschiedenem Druck

spannung mit einem Nadelventil, Verwendung des Konusprinzips für die Fenster und damit Messungen bei höherem Druck, konnte aus zeitlichen Gründen nicht zur Ausführung kommen.

III. Diskussion

a) Im Bändermodell des festen Körpers läßt sich das Versuchsergebnis folgendermaßen erklären: die Kompression bewirkt eine Abnahme der Gitterkonstanten und damit eine Veränderung des Potentialgebirges im Kristall. Daraus folgt im Termschema eine Verschiebung der Bandränder und eine Änderung der Breite der verbotenen Zone zwischen Valenz- und Leitfähigkeitsband, die ihrerseits die Lage der Kante der Grundgitterabsorption bestimmt. Möglich und Rompe⁹⁾ haben mit dieser Vorstellung die thermische Verschiebung der Kante auf die thermische Ausdehnung zurückgeführt. Wenn beide Deutungen richtig sind, müssen sich die Rotverschiebung pro Grad und die Blauverschiebung pro atm verhalten wie der kubische Ausdehnungskoeffizient 3α zur Kompressibilität χ . Dieses Verhältnis bestimmen wir aus der Grüneisenschen Formel¹⁰⁾

$$\frac{3\alpha V}{\chi C_v} = \gamma = - \frac{V}{\Theta_g} \frac{d\Theta_g}{dV} \quad (1)$$

V = Molvolumen, C_v = Molwärme, $\Theta_g = \frac{h}{k} \nu_g$ = charakteristische Temperatur, ν_g = Grenzfrequenz. Die wenig veränderliche Größe γ erhalten wir durch

¹⁰⁾ A. Eucken, Lehrbuch d. chem. Physik, II/2, S. 677 (1944).

Einsetzen der Zahlen für ZnS. Nach Adenstedt¹¹⁾ hat sie bei 0° C den Wert 0,7. Für CdS sollten wir mit dem Betrag von 0,02 Å pro atm für die Druckverschiebung eine Temperaturverschiebung von 0,25 Å pro Grad erwarten. Der experimentelle Wert ist um den Faktor 5 größer⁹⁾, Obwohl unsere Abschätzung nur grob ist, können wir darin einen Hinweis dafür sehen, daß die Temperaturverschiebung nicht allein durch die thermische Ausdehnung bewirkt wird.

Man kann versuchen, den Zusammenhang zwischen der Lage der Bandränder und der Gitterkonstanten a für ein spezielles Potential zu berechnen. In der Arbeit von Möglich und Rompe⁶⁾ ist dies für den Temperatureffekt mit dem linearen Modell von Kronig und Penney durchgeführt. (Periodisch im Abstand a unendlich hohe und unendlich schmale Potentialwände endlicher Durchlässigkeit $1/\delta$, sonst ist das Potential Null¹²⁾). Bei der Änderung von a wird das Produkt $a \cdot \delta$ konstant gehalten. Es ergibt sich

$$E_g \sim \frac{1}{a^2}; \quad \frac{\Delta E_g}{E_g} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -2 \frac{\Delta a}{a}. \quad (2)$$

E_g = Breite der verbotenen Zone, λ = Wellenlänge der Kante. Der thermische Ausdehnungskoeffizient von CdS ist inzwischen gemessen worden⁹⁾: $\alpha = 6 \cdot 10^{-6}$ pro Grad. Damit berechnet sich die Verschiebung zu $\Delta E_g/E_g = 1,2 \cdot 10^{-5}$ pro Grad, während der gemessene Wert $25 \cdot 10^{-5}$ pro Grad beträgt. Berechnet man die Druckverschiebung auf ähnliche Weise, so erhält man ein Viertel des beobachteten Wertes. Wenn man die starke Vereinfachung dieses Modells und die Unsicherheit in χ (mit (1) abgeschätzt) in Rechnung stellt, kann man feststellen, daß das Vorzeichen und die Größenordnung für den Druckeffekt richtig herauskommen.

Die Näherung vom gebundenen Elektron her erlaubt uns nur eine qualitative Aussage über $E_g(a)$. Die Bandbreite ist durch das Austauschintegral gegeben, die Lage der Bandmitte durch den Term des freien Atoms, verändert um das Integral C , das ungefähr dem Madelungschen Potential der Gittertheorie entspricht¹³⁾. Aus dieser Näherung läßt sich nicht ohne weitere Annahmen entnehmen, daß — wie bisher immer beobachtet — bei Erwärmung eine Rot-Verschiebung eintritt..

b) Auf eine ganz andere Ursache für eine Rotverschiebung der Absorptionskante machten Möglich, Riehl und Rompe⁷⁾ aufmerksam. Die Lebensdauer eines Elektrons in einem Term des oberen Bandes ist nicht unbegrenzt, sondern wird sogar recht klein, wenn man die Wechselwirkung mit dem Gitter berücksichtigt. Nun wissen wir aus der Strahlungstheorie, daß die Begrenzung der Lebensdauer zu einer Verbreiterung des Terms führt.

$$\Delta E = h/4 \pi \Delta t; \quad \Delta E = \text{Halbwertsbreite}; \quad \Delta t = \text{Lebensdauer.}$$

Das gilt natürlich auch für den Term, der die verbotene Zone begrenzt, deren Breite somit auch ohne Änderung der Gitterkonstanten temperaturabhängig wird. Nach Möglich, Riehl und Rompe wird die mittlere Aufenthaltsdauer des Elektrons im oberen Term und damit auch dessen Verbreiterung durch die Zahl der Vielfachstöße bestimmt. Da diese Zahl im Falle von Quarz bis etwa 700° C sehr klein ist und dann plötzlich stark ansteigt, sollte man eine entsprechende Verschiebung der Kante erwarten. Experimente darüber liegen noch nicht vor. Man weiß nur, daß die Kante bei Zimmertemperatur bei 1800 Å liegt und

¹¹⁾ H. Adenstedt, Ann. Physik 26, 69 (1936).

¹²⁾ S. Flügge, Rechenmethoden der Quantentheorie I, S. 39, 69, Springer 1947.

¹³⁾ A. Sommerfeld u. H. Bethe, Handbuch d. Physik, XXIV/2, Ziff. 12.

daß die Emission glühender Quarze bis 4000 Å reicht. Jedenfalls ergibt sich so keine Erklärung für die temperaturproportionale Verschiebung, die bei tieferen Temperaturen beobachtet wird. Die Zahl der Einfachstöße mit dem Gitter ist nun zwar proportional zur absoluten Temperatur, aber wenn man für das Wechselwirkungspotential den von Bloch in seiner Leitfähigkeitstheorie benutzten Ansatz einführt^{13a)}, gelangt man zu viel zu kleinen Werten für die Termverbreiterung.

In polaren Kristallen ist nun nach Fröhlich¹⁴⁾ die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Gitter größer. Bei den Schwingungen des optischen Zweiges entsteht in jeder Zelle eine elektrische Polarisierung, da sich die entgegengesetzt geladenen Ionen in verschiedener Richtung bewegen. Aus diesem Polarisationsfeld läßt sich in bekannter Weise mit Hilfe der Poissonschen Gleichung ein Potential berechnen, das an Stelle des Blochschen Potentials Verwendung findet.

Radkowsky⁸⁾ führt mit dem Blochschen und mit dem Fröhlichschen Ansatz die Berechnung der Stoßzahlen für ein Elektron am unteren Rand des oberen Bandes durch und zeigt, daß die Termverbreiterung im ersten Fall, der den nicht polaren Kristallen entspricht, sehr klein wird, während sie im zweiten Fall, also bei den polaren Kristallen, zu der Größenordnung der beobachteten Verschiebung führt. Die folgende Formel gilt für einen polaren Kristall mit kubischem Gitter und wird auch für die Verbreiterung des obersten Terms im unteren Band benutzt, in dem sich das Loch befindet.

$$\Delta E = e^4 m^{1/2} k T / \sqrt{2} a^3 M h^{3/2} \nu_i^{1/2}. \quad (3)$$

ΔE Halbwertsbreite des Terms, e bzw. m Ladung und effektive Masse des Elektrons oder des Loches, k Boltzmannsche Konstante, M reduzierte Masse der Ionen, ν_i longitudinale Schwingungsfrequenz. Der Zusammenhang mit der gewöhnlichen Reststrahlenfrequenz ν_i ist

$$\nu_i^2 = \nu_i^2 + e^2 / 2 \pi M a^3.$$

Im Folgenden wollen wir die beiden hier vorliegenden Deutungen der temperaturproportionalen Kantenverschiebung auf einige experimentelle Ergebnisse anwenden.

c) Im ersten Teil dieser Arbeit wurde gezeigt, daß eine Druckverschiebung der Kante vorhanden ist, deren Größenordnung der unter a) gegebenen Erklärung entspricht. Nach b) ergibt sich eine viel geringere Änderung ΔE , denn sowohl a als auch ν_i ändern sich nur wenig mit dem Druck. Eine Abschätzung der Druckabhängigkeit von ν_i folgt aus der Grüneisenschen Formel (1).

d) Für nicht polare Isolatorkristalle (etwa Diamant, Quarz) liegen keine Messungen der Temperaturabhängigkeit der Absorption vor. Nach b) sollte der Effekt um 3–4 Größenordnungen kleiner sein als in polaren Kristallen, während der Ausdehnungskoeffizient höchstens um den Faktor 100 kleiner ist. Wie aus Untersuchungen der lichtelektrischen Leitfähigkeit bekannt ist, verschiebt sich die Lage des selektiven Maximums der Leitfähigkeit bei Temperaturänderung genau wie die Kante¹⁾ ⁹⁾ ¹⁵⁾. Beim Diamant ist nun gefunden worden, daß das Maximum bei Zimmertemperatur um „einige $\mu\mu$ “ gegen das bei -190° nach Rot verschoben ist, also etwa 0,1 Å pro Grad¹⁶⁾. Diese Größenordnung spricht für die Erklärung a).

^{13a)} A. Sommerfeld u. H. Bethe, l. c. Ziff. 34.

¹⁴⁾ H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc. London A **160**, 230 (1937).

¹⁵⁾ H. Rose, Z. Physik **6**, 175 (1921).

¹⁶⁾ H. Lenz, Ann. Physik **83**, 941 (1927).

e) Gewöhnlich rechnet man Kristalle vom Zinkblende- und Wurtzittyp (ZnS, ZnO, CdS, BeO) zu den nichtpolaren Kristallen^{17) 18)}, wenn auch gelegentlich die elektrostatische Gittertheorie auf sie erfolgreich angewandt worden ist. Sie werden geradezu als typische Vertreter der Hauptvalenzgitter genannt und eher dem Diamanten und dem Quarz als dem NaCl zugeordnet¹⁹⁾. Für die Bindung spielen Austauschkräfte eine Rolle, deren Vorhandensein schon an der großen Breite der Bänder zu erkennen ist. Andererseits beweist die Ultrarotabsorption, daß der polare Charakter nicht ganz verloren gegangen ist. Man wird daher annehmen, daß vor allem das S-Ion stark deformiert ist, so daß sich Elektronenbrücken bilden, daß aber die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen am S größer ist als am Cd oder Zn. Bei der Berechnung des Störungspotentials sollte man aus dem hier angeführten Grunde im Falle ZnS nur einen Teil β ($0 < \beta < 1$) der Ionenladung einsetzen, dann kommt in der Formel (3) ein Faktor β^2 hinzu²⁰⁾.

f) Es ist interessant, daß auch für ein Metall eine temperaturproportionale Verschiebung der Absorptionskante gemessen worden ist. Die Rechnungen von Radkowsky umfassen diesen Fall nicht. Pennington²¹⁾ kam zu einer guten Darstellung der in einem weiten Temperaturbereich durchgeführten Messungen, indem er nach der Kronigshausen'schen Dispersionstheorie die Änderung der Breite der verbotenen Zone infolge thermischer Ausdehnung ausrechnete. Eine Verbreiterung des Transmissionsbandes mit T wurde nicht gefunden.

g) Bisher haben wir kleine Änderungen der Gitterkonstante betrachtet. Nach Messungen von Gisolf¹⁸⁾ und Kröger²²⁾ verschiebt sich die Frequenz der Absorptionskante in der lückenlosen Mischkristallreihe ZnS—CdS stetig und zwar annähernd linear mit den Molprozenten. Das steht im Gegensatz zum Verhalten anderer Mischkristalle, bei denen die Absorption beider Bestandteile sich überlagert²³⁾. Im Falle ZnS—CdS kommen die Unterschiede zwischen Zn und Cd nicht zum Ausdruck, sondern es bildet sich ein Leitfähigkeitsband, dessen energetische Lage von der Zusammensetzung abhängt. Das ist ein weiterer Hinweis auf homöopolare Bindungscharakter²⁴⁾. Wie Röntgenstrukturuntersuchungen von Kröger²⁴⁾ zeigen, ist in dieser Mischkristallreihe das Vegardsche Gesetz gültig, d. h. die (im ganzen Kristall einheitliche) Gitterkonstante variiert linear mit den Molprozenten. Nehmen wir einmal an, daß es im wesentlichen die Änderung der Gitterkonstanten ist, welche die Kantenverschiebung hervorruft, $a = 3,84 \text{ \AA}$ für ZnS und $4,14 \text{ \AA}$ für CdS. Die Kanten liegen bei 3,67 eV und 2,41 eV. Dem Experiment entsprechend interpolieren wir linear und berechnen zum Vergleich die Verschiebung, die bei einer Änderung der Gitterkonstanten auftreten würde, welche thermischer Ausdehnung um 1 Grad entspricht. Es ergibt sich für CdS $0,22 \text{ \AA}$, also fast der Wert, den wir früher aus der Druckverschiebung als von der thermischen Ausdehnung stammenden Anteil der thermischen Verschiebung be-

¹⁷⁾ H. G. Grimm u. H. Wolff, Handbuch d. Physik, XXIV/2, Ziffer 32.

¹⁸⁾ J. H. Gisolf, Physica 6, 85 (1939). Bei polarer Bindung sollte die Breite der verbotenen Zone bei ZnS 15 eV statt 3,7 eV sein.

¹⁹⁾ H. Staudé, Phys.-chem. Taschenbuch, I, 726 (1945).

²⁰⁾ Radkowsky rechnet, ohne darauf hinzuweisen, mit einfach geladenen Zn und S-Ionen.

²¹⁾ J. V. Pennington, Physic. Rev. 39, 953 (1932) Temperaturverschiebung des Transmissionsbandes von Ag.

²²⁾ F. A. Kröger, Physica 6, 779 (1939).

²³⁾ F. A. Kröger, Physica 7, 92 (1940); ZnS—MnS.

²⁴⁾ F. A. Kröger, Z. Kristallogr. 102, 132 (1940).

rechnet hatten (0,25 Å). Die gute Übereinstimmung ist natürlich Zufall, denn (1) gilt nicht so genau.

b) Eine experimentelle Aussage über die Stoßverbreiterung können wir durch Messung des Verlaufs der Absorptionskante als Funktion der Temperatur erhalten. Wir können abschätzen, welcher Anteil der Verschiebung auf das Flacherwerden bei hohen Temperaturen kommt, das ergibt im wesentlichen den Effekt b). Die Breite der Kante, soweit sie auf Gitterstöße zurückführbar ist, sollte etwa das T -fache des Stoßanteils der Verschiebung pro Grad sein. Für ZnS ist die Halbwertsbreite des oberen Terms $6 kT$, also 0,15 eV bei 300 K (Formel (3)). Bei tiefen Temperaturen, d. h. sobald der Abfall der spezifischen Wärme merklich wird, gilt die Rechnung von Radkowsky und damit auch die Linearität nicht mehr. Aus der Grüneisenschen Formel (1) folgt, daß die Wärmeausdehnung in diesem Gebiet proportional mit der Molwärme abfällt²⁵⁾. Allerdings hat Adenstedt¹¹⁾ bei Zinkblende größere Abweichungen von diesem einfachen Verhalten gefunden. Unterhalb -190°C gibt es sogar einen Bereich mit negativem kubischem Ausdehnungskoeffizienten.

i) Die nach Radkowsky berechneten Stoßzahlen spielen auch eine Rolle bei den Kristallphosphoren. Der Mechanismus, durch den ein Elektron im Leitfähigkeitsband schnell an den unteren Rand desselben gelangt, ist nach Möglich und Rompe²⁶⁾ die Plasmawechselwirkung mit den übrigen Elektronen im oberen Band, was etwa 10^{-10} sec als Relaxationszeit ergibt. Nach Radkowsky kommen wir nun auf $5 \cdot 10^{14}$ (ZnS, 300°K) Stöße pro sec für den unteren Rand des oberen Bandes. Dieser Vorgang könnte der Plasmawechselwirkung Konkurrenz machen, so daß eine weitere Untersuchung notwendig erscheint. Auf die Bedeutung der Termverbreiterung für die Breite der Emissionsbanden von Phosphoren sei hier nur hingewiesen.

Das Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen läßt sich dahingehend zusammenfassen, daß die Stoßbreite den größeren Teil der thermischen Verschiebung der Kante hervorruft. Im Gegensatz zur Radkowskyschen Ansicht ist jedoch der Anteil der thermischen Ausdehnung, dessen Vorzeichen nicht allgemein vorausgesagt werden kann, nicht zu vernachlässigen. Beim CdS verhalten sich die Verschiebungen wie 4:1. Eine Trennung der Effekte wird ermöglicht durch Messung der Verschiebung bei isothermer Kompression, die Verbreiterung der Kante mit wachsendem T und durch die Messung ihrer Lage als Funktion der Gitterkonstanten, wofür ähnliche Kristalle gleicher Struktur und geeignete Mischkristallreihen in Betracht kommen.

Der experimentelle Teil der Arbeit wurde im II. Physikalischen Institut der Universität Berlin als Diplomarbeit ausgeführt. Ich danke Herrn Prof. Rompe für die Stellung des Themas und wertvolle Ratschläge sowie Herrn Prof. Möglich für anregende Diskussionen. Ferner bin ich Herrn Dr. Fassbender für die Überlassung der Kristalle, Herrn Seiwert für die Mitteilung seiner Meßergebnisse und Herrn Damzog vom Institut für Festkörperforschung in Berlin-Buch für die Anfertigung der Druckkammer zu Dank verpflichtet.

²⁵⁾ F. Möglich u. R. Rompe, Z. Physik 115, 707 (1940).

Berlin, II. Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 15. Januar 1949.)

Über die Theorie der Diffusion thermischer Neutronen in einer wasserstoffhaltigen Substanz

Von Detlof Lyons

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Die Fermische Theorie der Diffusion thermischer Neutronen wird in der nachfolgenden Untersuchung verallgemeinert durch die Berücksichtigung der Anisotropie der elementaren Streuprozesse.

Einleitung

Die Theorie der Bewegung thermischer Neutronen, der sog. C-Neutronen, in wasserstoffhaltiger Substanz ist in ihren wesentlichen Zügen von Fermi¹⁾ aufgestellt worden. Wir wollen uns hier damit beschäftigen, die Fermische Theorie in dem Sinne zu verfeinern, daß wir der Anisotropie der elementaren Streuung Rechnung tragen. Damit ist folgendes gemeint: Fermi (l. c.) hat den Streuprozess eines einzelnen Neutrons an einem Wasserstoffkern genauer diskutiert, und da ergab sich, daß diese elementare Streuung bei thermischen Neutronen nicht mehr isotrop ist, wie das bei schnellen Neutronen, d. h. den Neutronen, deren Energie oberhalb der chemischen Bindungsenergien liegt, mit denen die Protonen an die Moleküle gebunden sind (etwa 1 Volt), der Fall ist. Fermi glaubte aber, daß dieser Effekt, der sich schwer theoretisch abschätzen läßt, von nur geringem Einfluß auf die Meßergebnisse ist. Da nun die Meßmethoden verfeinert worden sind, scheint es nicht ohne Interesse zu sein, den Einfluß der besprochenen Anisotropie auf die Ergebnisse der Diffusionstheorie zu betrachten. Das soll in dieser Arbeit geschehen und zwar in einem phänomenologischen Sinne, wobei die theoretische Kenntnis des elementaren Winkelverteilungsgesetzes nicht vorausgesetzt wird. Wir werden zeigen, daß das elementare Winkelverteilungsgesetz selbst nicht in die Theorie eingeht, sondern nur der Mittelwert $\cos \Theta$ über alle möglichen Winkel Θ , um die ein thermisches Neutron durch Streuung an einem (chemisch gebundenen) Proton aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Wir führen also sozusagen einen Parameter $\cos \Theta$ ein, dessen Zahlenwert aus den Experimenten bestimmt werden muß. Wir wollen annehmen, daß eine weitergehende Verfeinerung der Diffusionstheorie nicht nötig ist, wie etwa die genauere Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung der thermischen Neutronen. Wir rechnen vielmehr mit einer allen thermischen Neutronen gemein-

¹⁾ E. Fermi, Ric. Sci. VII-II, 13 (1936); s. a.: E. Amaldi u. E. Fermi, Physic. Rev. 50, 899 (1936).

samen (mittleren) Geschwindigkeit, die der der Wärmebewegung entspricht. In der Fermischen Theorie trat als dimensionsloser Parameter die Zahl N auf, die angibt, nach wieviel elastischen Stößen das Neutron von einem Proton eingefangen wird, und das ist das Verhältnis vom Streu- zum Einfangsquerschnitt. In unserer Theorie kommt noch der dimensionslose Parameter $\cos \Theta$ hinzu. Wir werden sehen, wie sich hier die beiden Parameter N und $\cos \Theta$ aus drei voneinander unabhängigen Messungen bestimmen lassen, nämlich der Messungen 1. der freien Weglänge für Streuung, 2. der Diffusionslänge, 3. der Albedo. Dadurch ist es möglich, eine Prüfung der Theorie vorzunehmen, indem sich eine der drei direkt bestimmbaren experimentellen Größen durch die beiden anderen ausdrücken läßt.

§ 1

Wir wollen nun das für die Diskussion der experimentell bestimmbaren Größen wichtige Problem behandeln. Wenn ϱ die Neutronendichte (die proportional der Aktivierung eines unendlich dünnen Indikators für thermische Neutronen ist) bedeutet, so soll also $\varrho(x)$ nur abhängig sein von einer räumlichen Koordinate, etwa der x -Koordinate eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Ist dann $s(x)$ der Neutronenstrom in Richtung x und q die Quellendichte der thermischen Neutronen in der wasserstoffhaltigen Substanz, so gilt für Strom und Dichte die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\varrho}{\tau} + q. \quad (1)$$

Hierin ist τ die Lebensdauer der thermischen Neutronen in der wasserstoffhaltigen Substanz. Ist ferner λ die freie Weglänge, v die mittlere Geschwindigkeit der thermischen Neutronen und N die (mittlere) Zahl der Zusammenstöße mit den Protonen der wasserstoffhaltigen Substanz, die ein thermisches Neutron macht, bis es von einem Proton eingefangen wird (und mit diesem zusammen unter Abgabe eines γ -Quants eine Deuteron bildet), so besteht zwischen diesen vier Konstanten der Zusammenhang:

$$\tau = \frac{\lambda}{v} N. \quad (2)$$

Berücksichtigt man nur die Neutronenstreuung an den Wasserstoffkernen, so ist $N = \sigma_s/\sigma_e$, wo σ_s bzw. σ_e der Wirkungsquerschnitt für Streuung bzw. Einfang bedeutet. N ist von der Größenordnung 200 in Paraffin oder Wasser. Die Tatsache, daß N in genügend stark wasserstoffhaltiger Substanz eine sehr große Zahl ist, nutzt Fermi (l. c.) dahingehend aus, daß er die Gültigkeit der gewöhnlichen Diffusionstheorie voraussetzt. Auch wir wollen uns hier zunächst ohne nähere Begründung dem Fermischen Gedanken anschließen und setzen an:

$$s = -D \frac{d\varrho}{dx}. \quad (3)$$

Später erst wollen wir die Gültigkeitsgrenzen dieser Beziehung zwischen Strom und Dichte näher diskutieren. Im Gegensatz zu Fermi werden wir aber die Diffusionskonstante D nicht gleich $\lambda v/3$ setzen dürfen, denn dieser „gaskinetische“ Wert läßt sich nur rechtfertigen, wenn die elementare Streuung isotrop ist, was

wir ja, wie in der Einleitung besprochen, nicht voraussetzen wollen. Setzen wir (3) in (1) ein, und beachten wir, daß im stationären Fall, der uns hier nur interessieren soll, $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ ist, so erhalten wir für (1)

$$-D\tau \frac{d^2 \varrho}{dx^2} = -\varrho + q\tau.$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist:

$$\varrho = e^{\pm \frac{x}{L}}, \quad (4)$$

wo

$$L = \sqrt{D\tau} \quad (5)$$

(analog wie bei Fermi) die Diffusionslänge bedeutet.

§ 2

Die Berechnung der Diffusionskonstanten wollen wir nun vornehmen unter der einschränkenden Voraussetzung, daß die Zeit, in der das Neutron von einem Proton der wasserstoffhaltigen Substanz eingefangen wird (und mit diesem zusammen ein Deuteron bildet), genügend groß ist; oder genauer gesagt: daß nur Zeiten betrachtet werden, während der das Neutron eine genügend große Zahl von Zusammenstößen mit den Protonen erleidet. Wir betrachten eine bei $x = 0$ konzentrierte Quelle thermischer Neutronen, wobei pro Sekunde q_0 Quellenneutronen erzeugt werden. Wir verfolgen nun die Projektion der Bahn eines einzelnen Neutrons auf die x -Richtung und finden, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Neutron nach einer gewissen Zeit t , falls es nicht inzwischen von einem Proton eingefangen wird, an einer Stelle befindet, die dem Werte von x entspricht, proportional zu

$$G(x, t)$$

ist, wo unter den gemachten Voraussetzungen G eine gewöhnliche Gaußsche Fehlerfunktion ist, die als einzigen Parameter die Diffusionskonstante D enthält.

Also

$$G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (6)$$

Da nun aber in einer Zeit t eine Wahrscheinlichkeit $e^{-\frac{t}{\tau}}$ dafür besteht, daß das Neutron nicht eingefangen wird, so haben wir als stationäre Dichte der Neutronen im Abstände x von der Quelle

$$\varrho(x) = q_0 \int_0^\infty dt e^{-\frac{t}{\tau}} G(x, t). \quad (7)$$

Eine einfache Integration ergibt:

$$\varrho(x) = \frac{q_0 \tau}{L} e^{-\frac{|x|}{L}}, \quad (8)$$

wobei L nach (5) die Diffusionslänge:

$$L = \sqrt{D\tau} \quad (5')$$

ist.

Die wesentliche Übereinstimmung von (8) mit (4) zeigt, daß wir so rechnen können, als würde nach einer mittleren Zeit $\Delta t = \frac{\tau}{N} \left(= \frac{\lambda}{v} \right)$ ein Stoß erfolgen und zur Dichte an der Stelle x nur die Neutronen beitragen, die im Mittel N Stöße gemacht haben. Bilden wir mit Hilfe der Verteilungsfunktion (8) den Mittelwert von x^2 , so erhalten wir die Beziehung:

$$D\tau = \frac{x^2}{2}. \quad (9)$$

Wir hatten bisher nur eine einzige Koordinate betrachtet, indem wir die Bewegung der Neutronen auf die x -Achse projizierten. Räumlich gesehen wird sich ein Neutron, das im Punkte $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ thermisch geworden ist, sich im Mittel nach N Stößen an der Stelle (x, y, z) befinden. Die Strecke $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist die geometrische Summe aus den N freien Wegstrecken $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ d. h. den Strecken, die das thermische Neutron in seiner Zickzackbewegung vor dem ersten, zweiten, ..., N -ten Stoß zurücklegt. Wegen $r^2 = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} = 3 \overline{x^2}$ haben wir mit (5) und (9):

$$6 L^2 = r^2. \quad (10)$$

Sei nun $\vartheta_{n,n+s}$ der Winkel zwischen der n -ten und $(n+s)$ -ten durchlaufenen Wegstrecke des Neutrons, so haben wir:

$$\overline{r^2} = \sum_{n=1}^N \overline{\lambda_n^2} + 2 \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^{N-n} \overline{\lambda_n \lambda_{n+s} \cos \vartheta_{n,n+s}}. \quad (11)$$

Die Mittelwertbildung über den Kosinus der Winkel ergibt nach einfacher (11) Rechnung

$$\overline{\cos \vartheta_{n,n+s}} = \overline{\cos \Theta^s}, \quad (12)$$

wobei $\Theta = \vartheta_{n,n+1}$ der Ablenkungswinkel bei einem einzelnen Stoß ist, um den das Neutron gestreut wird.

Weiter haben wir:

$$\overline{\lambda_n^2} = 2 \lambda^2; \quad \overline{\lambda_n \lambda_{n+s}} = \lambda^2, \quad (13)$$

wobei λ die freie Weglänge für Streuung ist. Da N voraussetzungsgemäß eine sehr große Zahl sein soll, so erscheint es unbedenklich, die Summe über s in (11) bis in das Unendliche zu erstrecken. Nach Einsetzen von (12) und (13) in (11) erhalten wir nun

$$\overline{r^2} = N \left(2 \lambda^2 + 2 \lambda^2 \sum_{s=1}^{\infty} \overline{\cos \Theta^s} \right) = \frac{2 N \lambda^2}{1 - \overline{\cos \Theta}}.$$

Setzen wir das in (10) ein, so resultiert für die Diffusionslänge L folgender Ausdruck

$$L = \lambda \sqrt{\frac{N}{3(1 - \overline{\cos \Theta})}}, \quad (14)$$

und als Diffusionskonstante erhalten wir dann aus (5):

$$D = \frac{\lambda v}{3(1 - \overline{\cos \Theta})}. \quad (15)$$

Bei isotroper elementarer Streuung, wofür $\overline{\cos \Theta} = 0$ wird, kommen wir zu dem Fermischen Ausdruck für die Diffusionslänge zurück; ebenso ergibt sich dann für die Diffusionskonstante der aus der kinetischen Gastheorie geläufige Ausdruck.

§ 3

Die Gültigkeit der Beziehung (3) des vorigen Paragraphen zwischen Strom und Dichte bleibt beschränkt auf Raumgebiete, in denen sich die Dichte ϱ auf Strecken der Größenordnung der freien Weglänge λ nicht allzu stark ändert. Befindet sich nun etwa bei $x=0$ eine Kadmiumschicht, die bei genügender Dicke bekanntlich alle auf sie auftreffenden Neutronen absorbiert, und sind die Quellen der thermischen Neutronen gleichmäßig mit konstanter Quellendichte q über den ganzen Paraffinblock verteilt, so haben wir als vollständige Lösung (4) des vorigen Paragraphen

$$\varrho = q\tau \left(1 - e^{-\frac{|x|}{\tau}}\right). \quad (16)$$

τ ist wieder die Lebensdauer eines thermischen Neutrons in dem Paraffin. In großer Entfernung $x \gg L$ von der Kadmiumplatte $x=0$ haben wir $\varrho(\infty) = q\tau$, während in unmittelbarer Nähe der Kadmiumplatte $\varrho(0) = 0$ ist. Wird nun aber das Verhältnis $\varrho(\infty)/\varrho(0)$ gemessen, so ergibt sich ein Wert von der Größenordnung 10 und nicht ∞ , wie er nach der gewöhnlichen Diffusionstheorie zu erwarten ist. Man nennt die Größe

$$\left(\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)} - 1\right) \quad (17)$$

die „meßbare Albedo“. Vorausgesetzt ist dabei, daß der Indikator für thermische Neutronen (z. B. Dysprosium) genügend dünn ist, derart, daß die durch die auffallende Neutronenstrahlung induzierte Aktivierung wirklich proportional der Neutronendichte ϱ wird. Daß in unmittelbarer Nähe der Kadmiumplatte (oder, was prinzipiell das gleiche ist: am Rande eines Paraffinblocks) die gewöhnliche Diffusionstheorie versagt, liegt eben daran, daß die Dichteänderung auf einer Strecke der Größenordnung λ (etwa 3 mm) beträchtlich ist. Um die Dichte $\varrho(x)$ in der Nähe der Absorberplatte etwas besser bestimmen zu können, ohne dabei die Beziehung (3) des vorigen Paragraphen und somit die anschauliche Definition einer Diffusionskonstanten aufgeben zu müssen, was bei Berücksichtigung der Anisotropie der Einzelstreuung zu beträchtlichen Komplikationen führen würde, wenden wir das von Fermi benutzte lineare Modell an, das G. C. Wick²⁾ näher beschrieben und für gewisse Diffusionsprobleme zu einem geeigneten Näherungsverfahren ausgebaut hat. Das Fermische Modell beruht auf folgendem Gedankengang. Zunächst ist klar, daß die Neutronen, die in der Nähe der Ebene $x=0$ von links kommen, eine wesentlich andere Rolle spielen als die von rechts kommenden. Man muß also die Neutronen nach ihren Geschwindigkeitsrichtungen unterscheiden. Sei α der Winkel, den die Geschwindigkeitsrichtung mit der positiven x -Achse einschließt, so definieren wir (ähnlich, wie in der kinetischen Gastheorie) eine Verteilungsfunktion f ; und zwar soll

$$\frac{1}{2\pi} f(x, \cos \vartheta) d\omega$$

die (partielle) Dichte derjenigen Neutronen in der Ebene x sein, deren Geschwindigkeitsrichtung in das räumliche Winkелеlement $d\omega (= |\sin \vartheta| d\vartheta d\varphi = d\cos \vartheta d\varphi)$ fällt. ϑ und φ sind dabei die Polarwinkel bezogen auf die positive x -Achse als Polarachse. Wir setzen $\cos \vartheta = \xi$ als Abkürzung. Da f nicht von φ abhängen soll,

²⁾ G. C. Wick, Z. Physik 121, 702 (1943).

haben wir als Gesamtdichte

$$\varrho(x) = \int_{-1}^{+1} f(x, \xi) d\xi, \quad (18)$$

und die Stromdichte in Richtung x wird:

$$s(x) = v \int_{-1}^{+1} \xi f(x, \xi) d\xi. \quad (19)$$

Die Verteilungsfunktion f wollen wir uns, was ihre Winkelabhängigkeit betrifft, (nach einem Vorschlag von Bothe) nach Legendreschen Kugelfunktionen entwickelt denken:

$$f(x, \xi) = c(x) + d(x) P_1(\xi) + e(x) P_2(\xi). \\ (\text{Es ist } P_1(\xi) = \xi; \quad P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}.)$$

Wir nehmen an, daß die hingeschriebenen Glieder die Funktion f schon genügend genau approximieren. Die Ausrechnung der obigen Integrale (18) und (19) mit diesem Reihenansatz ergibt

$$\varrho(x) = 2c(x); \quad s(x) = \frac{2}{3}v \cdot d(x).$$

Wir führen, statt mit den beiden Funktionen $c(x)$ und $d(x)$ weiterzurechnen, die Werte von $f(x, \xi)$ ein für die beiden Winkel, bei denen die zweite Kugelfunktion Null wird, also $\xi_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ und schreiben:

$$f\left(x, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \varrho_+(x); \quad f\left(x, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \varrho_-(x). \quad (20)$$

Nach unserem Reihenansatz sind andererseits diese beiden Ausdrücke:

$$f\left(x, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = c + \frac{1}{\sqrt{3}}d; \quad f\left(x, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = c - \frac{1}{\sqrt{3}}d,$$

so daß man c und d durch ϱ_+ und ϱ_- ersetzen kann. Man erhält:

$$\varrho = \varrho_+ + \varrho_-, \\ s = \frac{v}{\sqrt{3}}(\varrho_+ - \varrho_-). \quad (21)$$

Anschaulich gesprochen gibt es im linearen Modell nur zwei Sorten von Neutronen: solche, die nach rechts und solche, die nach links gehen. Strom und Dichte berechnen sich nach den Gleichungen (21). Eine etwas eingehendere Betrachtung, die im nächsten Paragraphen wiedergegeben werden soll, lehrt dann, daß zwischen Dichte und Strom die Beziehung $s = \text{const} \cdot d\varrho/dx$ durchweg gilt. Daraus entnehmen wir, daß $\text{const} = -D$ ist, wo D durch Formel (3) des zweiten Paragraphen gegeben ist. Drücken wir dann ϱ_+ und ϱ_- durch ϱ und diesen Ausdruck (3) für s aus, so erhalten wir endlich:

$$\varrho_+(x) = \frac{1}{2} \left(\varrho(x) - \frac{1}{1 - \cos \Theta} \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \frac{d\varrho}{dx} \right), \\ \varrho_-(x) = \frac{1}{2} \left(\varrho(x) + \frac{1}{1 - \cos \Theta} \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \frac{d\varrho}{dx} \right). \quad (22)$$

§ 4

Wir wollen nun zeigen, daß im Rahmen des linearen Modells gilt

$$s(x) = -D \frac{dq}{dx}.$$

Wir gehen zu diesem Zwecke vom „exakten“ Modell aus. Es sei also (wie im vorigen Paragraphen) $f(x, \xi) dx d\xi$ im stationären Zustand die Anzahl der Neutronen, die sich im „räumlichen Element“ dx (d. i. zwischen den Ebenen $x - \frac{1}{2} dx$ und $x + \frac{1}{2} dx$) und im Geschwindigkeitselement $d\xi$ (d. i. mit x -Komponente der Geschwindigkeit im Element $v d\xi$) befinden. f genügt dann der Boltzmannschen Gleichung:

$$v \xi \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial x} = \frac{v}{\lambda} \left[\sigma \int_{-1}^{+1} d\xi' f(x, \xi') \omega(\xi', \xi) - f(x, \xi) \right] + q. \quad (23)$$

Die linke Seite stellt (bis auf den Faktor $dx d\xi$) die Zahl der Neutronen aus dem Element $dx d\xi$ dar, die das räumliche Element in der Sekunde mehr verlassen als dort hineinlaufen; und zwar vermöge ihrer konvektiven Bewegung müssen sie dabei die Grenzflächen, also die Ebenen $x - \frac{1}{2} dx$ und $x + \frac{1}{2} dx$ durchlaufen. Eine wesentlich andere Bedeutung hat die rechte Seite der Gleichung (23). Hier ist σ die Streuwahrscheinlichkeit ($= N/(N+1)$). λ ist hier genau genommen die freie Weglänge für Streuung und Einfang, so daß v/λ die auf die Sekunde bezogene Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Stoß stattfindet, gleichgültig, ob er zur Streuung oder zum Einfang führt. Man überlegt sich dann leicht, daß die eckige Klammer in (22) (bis auf den Faktor $dx d\xi$) die Zahl der Neutronen darstellt, die bei einem Stoß mehr in das Winkелеlement $d\xi$ hineingehen, als aus ihm herauskommen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\omega(\xi', \xi)$ hat die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit pro $d\xi$ dafür, daß das Neutron aus dem Element $d\xi'$ in das Element $d\xi$ hineingestreut wird. Wir haben

$$w(\xi', \xi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi W(\cos \Theta), \quad (24)$$

$$(\text{es war } \xi' = \cos \vartheta', \xi = \cos \vartheta)$$

wobei $W(\cos \Theta) d\Omega$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Neutron bei einem Stoß in das Raumwinkelement $d\Omega$ abgelenkt wird, das gegen die ursprüngliche Bewegungsrichtung um den Richtungskosinus

$$\cos \Theta = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi$$

geneigt ist.

Wir gehen jetzt zum linearen Modell über und machen für $W(\cos \Theta)$ (ähnlich wie im vorigen Paragraphen für $f(x, \xi)$) die Entwicklung:

$$W(\cos \Theta) = 1 + a P_1(\cos \Theta) + b P_2(\cos \Theta). \quad (25)$$

Setzt man das in das obige Integral (24) ein und rechnet man die Integrale über φ aus, so erhält man nach geeigneter Ordnung der einzelnen Terme:

$$w(\xi', \xi) = \frac{1}{2} [1 + a P_1(\xi') P_1(\xi) + b P_2(\xi') P_2(\xi)], \quad (26)$$

ein Ergebnis, das man auch leicht mittels des Additionstheorems der Kugelfunktionen gewinnen kann. Gemäß der Vorschrift des vorigen Paragraphen leitet man

aus (23) die Boltzmanngleichung für das lineare Modell ab. Man findet mit $\sigma = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{v}{\sqrt{3}} \frac{d\varrho_+}{dx} &= -\frac{v}{2\lambda} \left(1 - \frac{a}{3}\right) (\varrho_+ - \varrho_-) + \frac{1}{2} q, \\ -\frac{v}{\sqrt{3}} \frac{d\varrho_-}{dx} &= +\frac{v}{2\lambda} \left(1 - \frac{a}{3}\right) (\varrho_+ - \varrho_-) + \frac{1}{2} q. \end{aligned}$$

Und da $a = 3 \cdot \cos \Theta$ ist, wie man sich an Hand von Gleichung (24) leicht überzeugen kann, ergibt sich

$$s(x) = -\frac{\lambda v}{3(1 - \cos \Theta)} \frac{d\varrho}{dx}.$$

Man sieht hier übrigens noch, daß die Diffusionskonstante D genau den Wert hat, den wir im zweiten Paragraphen abgeleitet haben, was bedeutet, daß es unwesentlich ist, ob man in der Entwicklung (26) noch weitere Entwicklungsglieder hinzunimmt, das hängt natürlich damit zusammen, daß $N = \infty$ ($\sigma = 1$) angenommen wurde.

§ 5

Wir gehen nun daran, die schon angeschnittene Aufgabe mit Hilfe des linearen Modells zu lösen. Es handelt sich also darum, die Dichte $\varrho(x)$ für $x > 0$ zu finden, wenn sich in der Ebene $x = 0$ eine für thermische Neutronen undurchlässige Cd-Platte befindet. Wir nehmen zunächst $q = \text{const}$ an. Speziell interessiert uns dann das Verhältnis $\varrho(\infty)/\varrho(0)$. Da für das lineare Modell nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen die Gleichung (2) des ersten Paragraphen für alle x -Werte gültig ist, können wir eine spezielle Lösung (4) sofort hinschreiben, denn die Kontinuitätsgleichung (1) hat ja universelle Gültigkeit. Man hat dann:

$$\begin{aligned} \varrho(x) &= \varrho(\infty) \left(1 - A e^{-\frac{x}{L}}\right), \\ \left(\varrho(\infty) = q\tau \text{ und } L = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{N}{1 - \cos \Theta}}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Die zunächst willkürliche Konstante A bestimmt sich aus der Randbedingung bei $x = 0$. Da dort keine thermischen Neutronen nach rechts gehen können (die Absorberplatte $x = 0$ ist ja für thermische Neutronen undurchlässig), so haben wir $\varrho_+(0) = 0$ zu setzen. Das gibt nach (22)

$$\varrho(0) = \frac{1}{1 - \cos \Theta} \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \left(\frac{d\varrho}{dx}\right)_{x=0}.$$

Aus (27) erhält man dann:

$$1 - A = \frac{A}{N(1 - \cos \Theta)}.$$

Hieraus A berechnet und in (27) eingesetzt, ergibt

$$\varrho(x) = \varrho(\infty) \left(1 - \frac{\sqrt{N(1 - \cos \Theta)}}{1 + \sqrt{N(1 - \cos \Theta)}} e^{-\frac{x}{L}}\right). \quad (28)$$

Für das Verhältnis $\varrho(\infty)/\varrho(0)$ bekommen wir aus (28):

$$\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)} = 1 + \sqrt{N(1 - \cos \Theta)}. \quad (29)$$

(29) stellt die „Albedo-Formel“ von Fermi dar, die wir hier für den Fall der Gültigkeit eines beliebigen Winkelverteilungsgesetzes beim elementaren Streuprozeß verallgemeinert haben. Zu (29) wollen wir noch einige Bemerkungen machen, die u. U. bei praktischer Ausführung der Messung von Bedeutung sein können. Von einer näheren Begründung sehen wir dabei ab.

1. (29) gilt exakt im Falle, daß die Einzelstreuung isotrop ist (d. h. $\overline{\cos \Theta} = 0$). Im nächsten Paragraphen kommen wir noch einmal darauf zurück. Es läßt sich zeigen, daß für $\overline{\cos \Theta} \lesssim 0,3$ (29) noch eine sehr gute Näherung darstellt.

2. Versteht man unter $q(\infty)$ in (29) die Dichte für $x = 0$ bei fortgenommener Absorberplatte, so gilt (29) auch noch für den Fall einer von x abhängigen Quellenverteilung q , es muß nur dann q symmetrisch um $x = 0$ sein, d. h. $q(-x) = q(+x)$.

3. Die Dichte ϱ ist nicht einfach proportional der Aktivierung A_e eines Indikators für thermische Neutronen, wenn dieser nicht „unendlich“ dünn ist. Ist μ der entsprechende Absorptionskoeffizient des Indikators von der Dicke d , so gilt:

$$\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)} = \frac{A_e(\infty)}{A_e(0)} \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu d \sqrt{1 - \overline{\cos \Theta}} \left(\sqrt{N(1 - \overline{\cos \Theta})} - 1 \right) \right].$$

Der Indikator muß aber dabei so dünn sein, daß die eckige Klammer nicht wesentlich größer als eins wird.

§ 6

Hat man $\left(\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)} - 1 \right)$, L und λ durch Messungen bestimmt³⁾, so kann man N und $\overline{\cos \Theta}$ einzeln berechnen. Aus (14) in Verbindung mit (29) ergibt sich nämlich

$$\left(\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)} - 1 \right) \frac{\sqrt{3}}{\lambda} L = N, \quad (30)$$

$$\left(\frac{\varrho(\infty)}{\varrho(0)} - 1 \right) \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \frac{1}{L} = 1 - \overline{\cos \Theta}. \quad (31)$$

Nun hat Fermi (l. c.) gezeigt, daß man auf einfache Weise die freie Weglänge mit Hilfe einer Dichtebestimmung der thermischen Neutronen am Rande eines Paraffinblocks messen kann. Wir wollen nun den Fermischen Gedanken dazu benutzen, um bei bekanntem Werte für λ den Parameter $\overline{\cos \Theta}$ unabhängig von der soeben aufgestellten Beziehung (31) bestimmen zu können. Durch Messung der Randverteilung der thermischen Neutronen hat man dann die Möglichkeit, einen Wert für $\overline{\cos \Theta}$ zu bekommen und kann diesen zur Prüfung unserer Theorie mit dem aus (31) berechneten vergleichen.

Wir betrachten also die Dichteverteilung in unmittelbarer Nähe der Cd-Platte. Entwickelt man in (28) die Exponentialfunktion und vernachlässigt man die quadratischen und höheren Glieder in x (nimmt also $x \ll L$ an), so bekommt man nach einfacher Rechnung:

$$\frac{\varrho(x)}{\varrho(0)} = \sqrt{3} \left[(1 - \overline{\cos \Theta}) \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]. \quad (32)$$

Die Theorie des linearen Modells ergibt also, wie zur erwarten, einen linearen Verlauf der Dichte bis zum Rande. Es erscheint nun zweifelhaft, ob das lineare

³⁾ z. B. L durch die Methode von Döpel und Heisenberg, λ durch Wirkungsquerschnittmessung.

Modell die Dichteverteilung in unmittelbarer Nähe des Randes richtig beschreibt. Nach den Untersuchungen von Bothe ist zu erwarten, daß dort starke „Randeffekte“ auftreten. Ich habe nun durch Rechnungen, die sich auf die Boltzmann-Gleichung (23) des vierten Paragraphen stützen, feststellen müssen, daß in (32) das (eingeklammerte) absolute Glied $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ durch einen wesentlich größeren

Wert, der nahezu mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ übereinstimmt (genau 0,710), ersetzt werden muß, wenn man die asymptotische Dichteverteilung für $\frac{1}{2}\lambda \lesssim x \ll L$ erhalten will. Die genaue Rechnung, die hier nicht wiedergegeben werden kann, und die an anderer Stelle im Zusammenhang mit einem anderen Problem (Albedo bei teilweise durchlässiger Absorberplatte) ausführlich beschrieben werden soll, ergibt nämlich für die fragliche Konstante den numerischen Wert des bestimmten Integrals:

$$\int_0^1 \left[1 - \operatorname{arc\,cotg} \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{t} - \log \frac{1+t}{1-t} \right) \right] dt = 0,710.$$

Sei also x_0 der Schnittpunkt der Asymptote der Dichteverteilung mit der (negativen) x -Achse (s. Abb.), so hat man:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2} x_0} = 1 - \cos \Theta. \quad (33)$$

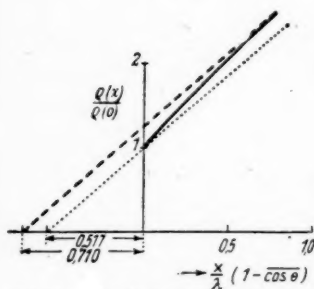


Abb. 1. Die Dichteverteilung am Rande des Paraffinblocks. Die gestrichelte Gerade stellt die Asymptote an die Dichteverteilung dar, die punktierte Gerade die sich aus dem linearen Modell ergebende Dichteverteilung, während die ausgezogene Kurve die Dichteverteilung nach dem exakten Modell wiedergibt

Die Abweichung des exakten Modells vom linearen Modell ist immerhin etwa 15%, was um so merkwürdiger zu sein scheint, als das exakte Modell (das sich auf (23) gründet) im Falle der Albedoformeln (30) und (31) genau übereinstimmt (absolut genau im Rahmen der Gültigkeit der Isotropie der Einzelstreuung) mit dem linearen Modell, wo ja auch die Dichte berechnet wird in unmittelbarer Nähe der Absorberplatte oder, was wesentlich dasselbe ist, am Rande des Paraffinblocks. In der folgenden Figur ist die theoretische Randverteilung wiedergegeben. Man sieht deutlich, daß auf der Strecke $0 < x \lesssim \frac{1}{2}\lambda$ starke Randeffekte auftreten, die davon herrühren, daß eine Gruppe

von Neutronen die Absorberplatte unter einem (gegen die Normale) nahezu rechten Winkel geneigt treffen. Eine Arbeit, die sich zur Aufgabe macht, ähnlich auffällige Randeffekte zu diskutieren, soll demnächst veröffentlicht werden. Es scheint nämlich wichtig zu sein, diese Randeffekte genauer als bisher zu behandeln, da in neuerer Zeit die Albedomessung zu einem Präzisionsverfahren zur Bestimmung der Wirkungsquerschnitte für Kernreaktionen ausgebaut wurde, namentlich durch Haxel und Volz.

Berlin N 113, Stolpische Str. 32.

(Bei der Redaktion eingegangen am 6. November 1948.)

Über die Theorie der elektrischen und magnetischen Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln und ein ihr angepaßtes Störungsverfahren

Von Walter Glaser

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird eine Störungsmethode entwickelt, welche der Theorie der Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln gut angepaßt ist und mit deren Hilfe im Jahre 1938 die Ablenkfehler elektrischer und magnetischer Ablenkssysteme berechnet worden sind. Die Resultate dieser Arbeit werden nochmals zusammengefaßt und es wird gezeigt, daß die Ergebnisse der Abhandlung „Beiträge zur Theorie der elektrischen Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln“ von Johannes Picht und Josef Himpan I und II¹⁾ als Sonderfälle in unserer obigen Arbeit vom Jahre 1938 enthalten sind, wenn man diese auf das rein elektrische Ablenkkfeld und auf fehlendes, seitliches Streufeld beschränkt.

Im folgenden soll ein allgemeines Störungsverfahren zur Bestimmung benachbarter Bahnkurven mit gleichem Anfangspunkt und gleicher Anfangsrichtung besprochen werden, das insbesondere für die Berechnung der Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln in elektrischen und magnetischen Feldern sehr gut geeignet ist und von uns bereits im Jahre 1938 dazu verwendet worden ist²⁾. Die ausführliche Begründung für diese Berechnungsmethode haben wir damals nicht veröffentlicht. Da dieses Verfahren auch für die Behandlung anderer elektronenoptischer Fragen nützlich sein dürfte und in zwei weiteren Fällen³⁾ bereits mit Erfolg verwendet wurde und da es andererseits in jüngster Zeit eine gewisse Kritik erfahren hat⁴⁾, soll es im folgenden ausführlich dargestellt werden, wobei sich von selbst ergeben wird, daß der vorgebrachte Einwand gegenstandslos ist. Im Anschluß daran wollen wir zeigen, wie einfach sich mit dem besprochenen Verfahren die Theorie der Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln in elektrischen und magnetischen Ablenkssystemen behandeln läßt. Anhangsweise wollen wir auf eine im Jahre 1941 von J. Picht und J. Himpan¹⁾ veröffentlichte Arbeitenreihe „Beiträge zur Theorie der elektrischen Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln“ (I, II und III) eingehen und zeigen, daß alle Ergebnisse der Beiträge I und II, die

¹⁾ J. Picht und J. Himpan, Ann. Physik **39**, 410 (1941). Im folgenden zitiert als P-H I und P-H II (1941).

²⁾ W. Glaser, Z. Physik **111**, 357 (1938), zitiert als Z. Ph. (1938).

³⁾ G. Wendt, Z. Physik **118**, 593 (1942); Z. Physik **119**, 423 (1942).

⁴⁾ J. Picht, Ann. Physik **43**, 62 Anm. 1, 1943 (siehe S. 405 ff. dieser Arbeit).

sich als richtig aufrecht erhalten lassen, als Sonderfälle in unserer Arbeit vom Jahre 1938 enthalten sind, wenn man diese auf das rein elektrische Ablenkfeld und auf fehlendes, seitliches Streufeld beschränkt.

Entwicklung des Störungsverfahrens

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Von einem bestimmten Punkt P_0 eines gegebenen Kraftfeldes gehe mit einer bestimmten Anfangsrichtung eine Bahnkurve aus, welche eine gegebene Ebene E im Punkte P_1 schneide (s. Abb. 1). Nun werde das Kraftfeld etwa durch Überlagerung eines anderen Kraftfeldes etwas abgeändert. Wir fragen: „Welche Verschiebung Δx , Δy erfährt der Durchstoßpunkt P_1 mit der gegebenen Ebene E , wenn Anfangspunkt und Anfangsrichtung der Bahn festgehalten werden?“ Wir legen die x - y -Ebene eines rechtwinkligen

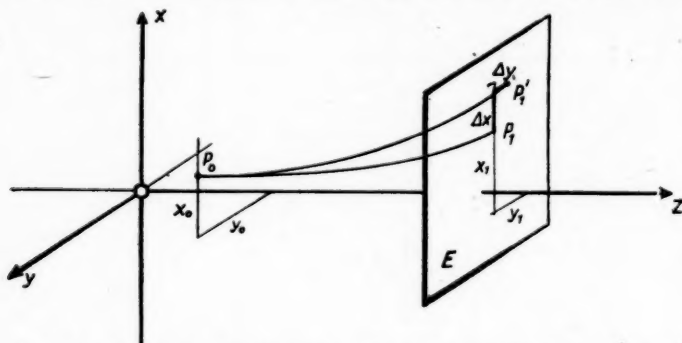


Abb. 1. P_1 Durchstoßpunkt der ungestörten Bahn mit der Ebene E . P'_1 Durchstoßpunkt der gestörten Bahn mit der gleichen Ebene

Koordinatensystems parallel zur Ebene E , so daß diese auf der z -Richtung senkrecht steht und durch $z = \text{konst}$ gegeben ist. Zur Beantwortung der gestellten Frage gehen wir zunächst aus von der beliebigen Funktion $F(x, y, x', y', z)$ von x , y , $\frac{dx}{dz} = x'$, $\frac{dy}{dz} = y'$ und z . Wenn man den Punkt $P_0 \equiv x_0, y_0, z_0$ mit $P_1 \equiv x_1, y_1, z_1$ durch eine beliebige Kurve C

$$x = x(z), \quad y = y(z) \quad (x_0 = x(z_0), \quad y_0 = y(z_0); \quad x_1 = x(z_1), \quad y_1 = y(z_1)) \quad (1)$$

verbindet, kann man das Integral

$$E(C) = \int_{z_0}^{z_1} F(x, y, x', y', z) dz \quad (2)$$

berechnen. Geht man zu einer Nachbarkurve \bar{C} über, die durch

$$\bar{x} = x(z) + \xi(z), \quad \bar{y} = y(z) + \eta(z) \quad (3)$$

gegeben sei, so ändert sich $E(C)$ um

$$\delta E(C) = E(\bar{C}) - E(C) = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \xi + \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial x'} \xi' + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' + \dots \right) dz, \quad (4)$$

wobei die Glieder zweiter und höherer Ordnung in ξ und η durch Punkte angedeutet sind. Nach einer partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned} \delta E(C) = & \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_1 \xi_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_1 \eta_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_0 \xi_0 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_0 \eta_0 + \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \xi dz \\ & + \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dz + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Wenn man verlangt, daß die Nachbarkurve \bar{C} gleichfalls durch die Punkte P_0 und P_1 gehen soll, so muß $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\xi_0 = 0$ und $\eta_0 = 0$ sein. Fordert man nun weiter, daß sich $E(C)$ beim Übergang zu dieser Nachbarkurve höchstens um Glieder zweiter Ordnung in ξ und η ändern soll, so müssen die Integrale, welche ξ und η in erster Ordnung enthalten, verschwinden. Dies hat bei willkürlichen Funktionen ξ und η (sie haben lediglich den Bedingungen $\xi_1 = \eta_1 = \xi_0 = \eta_0 = 0$ zu genügen) das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (6)$$

zur Folge. Dies sind Differentialgleichungen für die Ausgangskurve, die sogenannte Extremale. Die Gl. (6) stellen also die Bedingung dafür, daß sich E beim Übergang zu einer Nachbarkurve nur um Glieder zweiter und höherer Ordnung in den Bahnabänderungen ξ und η ändert.

Geht man nun von einer Extremalen aus und berechnet

$$E = \int_{z_0}^{z_1} F dz \quad (7)$$

(erstreckt über die P_0 mit P_1 verbindende Extremale) und geht zu einer benachbarten Kurve über, bei der sich der Anfangspunkt bzw. der Endpunkt um die Koordinatendifferenzen ξ_0 , η_0 bzw. ξ_1 , η_1 unterscheidet, so gilt nach (5) bis auf Glieder zweiter und höherer Ordnung

$$\delta E = \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_1 \xi_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_1 \eta_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_0 \xi_0 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_0 \eta_0. \quad (8)$$

Den Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial F}{\partial x'}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ nennen wir Normalenvektor und schreiben zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{z=z_1}, & \beta_1 &= \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{z=z_1} \\ \alpha_0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{z=z_0}, & \beta_0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{z=z_0} \end{aligned} \quad (9)$$

So erhält (8) die Gestalt

$$\delta E = \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \eta_1 - \alpha_0 \xi_0 - \beta_0 \eta_0. \quad (10)$$

Aus

$$\begin{aligned} \delta E &= E(x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0, x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1) - E(x_0, y_0, x_1, y_1) \\ &= \frac{\partial E}{\partial x_0} \xi_0 + \frac{\partial E}{\partial y_0} \eta_0 + \frac{\partial E}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial E}{\partial y_1} \eta_1 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

erhält man somit durch Koeffizientenvergleich in Gl. (10)

$$\alpha_1 = \frac{\partial E}{\partial x_1}, \quad \beta_1 = \frac{\partial E}{\partial y_1} \quad (12a)$$

$$\alpha_0 = -\frac{\partial E}{\partial x_0}, \quad \beta_0 = -\frac{\partial E}{\partial y_0}. \quad (12b)$$

Diese bekannten Tatsachen, welche wir für das folgende brauchen, wollten wir kurz ins Gedächtnis zurückrufen.

Aus (12a) und (12b) wollen wir nun vier weitere für das folgende grundlegende Beziehungen herleiten. Dazu denke man sich (12b) nach x_1 und y_1 und (12a) nach x_0 und y_0 aufgelöst:

$$x_1 = x_1(x_0, y_0, \alpha_0, \beta_0), \quad y_1 = y_1(x_0, y_0, \alpha_0, \beta_0) \quad (13)$$

$$x_0 = x_0(x_1, y_1, \alpha_1, \beta_1), \quad y_0 = y_0(x_1, y_1, \alpha_1, \beta_1). \quad (14)$$

Es wird nun behauptet, daß zwischen den Funktionen (13) und (14) der angegebenen Argumente die folgenden „Reziprozitätsbeziehungen“ gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} &= -\frac{\partial x_0}{\partial x_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial \beta_0} &= -\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \beta_0} &= -\frac{\partial y_0}{\partial \beta_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_0} &= -\frac{\partial x_0}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Zum Beweise differenziere man Gl. (12b) nach α_0 , indem man x_1 und y_1 nach (13) als Funktionen von α_0 und β_0 ansieht. Mittels der Bezeichnungen $E_{x_1 x_0} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_0}$, ... usw. erhält man so

$$\begin{aligned} -1 &= E_{x_0 x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} + E_{y_0 y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_0} \\ 0 &= E_{y_0 x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_0} + E_{y_0 y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Auflösung nach $\frac{\partial x_1}{\partial x_0}$ und $\frac{\partial y_1}{\partial x_0}$ ergibt

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_0} = \frac{E_{y_0 y_1}}{E_{y_0 x_1} E_{x_0 y_1} - E_{x_0 x_1} E_{y_0 y_1}}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_0} = \frac{-E_{y_0 x_1}}{E_{y_0 x_1} E_{x_0 y_1} - E_{x_0 x_1} E_{y_0 y_1}}. \quad (16)$$

Nun differenziere man (12a) partiell nach α_1 , indem man x_0 und y_0 nach (14) als Funktionen von α_1 und β_1 auffaßt:

$$\begin{aligned} 1 &= E_{x_1 x_0} \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} + E_{x_1 y_0} \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1} \\ 0 &= E_{y_1 x_0} \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} + E_{y_1 y_0} \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}. \end{aligned}$$

Auflösung nach $\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}$ und $\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}$ ergibt

$$\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} = \frac{-E_{y_1 y_0}}{E_{x_1 y_0} E_{y_1 x_0} - E_{x_1 x_0} E_{y_1 y_0}}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1} = \frac{+E_{x_1 x_0}}{E_{x_1 y_0} E_{y_1 x_0} - E_{x_1 x_0} E_{y_1 y_0}}. \quad (17)$$

Vergleicht man den Ausdruck von $\frac{\partial x_1}{\partial x_0}$ aus (16) mit dem von $\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}$ aus (17), so folgt wegen der Vertauschbarkeit in der Reihenfolge bei der partiellen Differentiation unmittelbar die erste der Beziehungen (15). Indem man mit den Variablen β_0 und

β_1 ebenso verfährt, erhält man mit Benützung der zweiten Glieder in (16) und (17) auch die anderen Gleichungen (15).

Die gewonnenen Beziehungen wollen wir nun zur Lösung unseres Störungsproblems benutzen. Dazu denken wir uns die Differentialgleichungen der Bahnkurven in der Gestalt (6) gegeben. Im Falle der Elektronenbewegung im elektrischen Feld mit dem Potential φ und dem magnetischen Feld mit dem Vektorpotential $\mathfrak{A} = i A_x + j A_y + k A_z$ ist z. B. F durch

$$F = \sqrt{\left(1 + \frac{\varphi}{U}\right)(1 + x'^2 + y'^2)} - k(A_x x' + A_y y' + A_z), \quad k = \sqrt{\frac{e}{2m}} \quad (18)$$

gegeben⁵⁾. U bedeutet dabei die durchfallene Beschleunigungsspannung der Elektronen vor Eintritt in das Feld und e/m ist die spezifische Elektronenladung. Ist F_0 die dem ursprünglichen Feld entsprechende Funktion F , so sei εF_1 die durch die Feldänderung an F hervorgerufene Änderung. Allgemeiner denke man sich F nach einem kleinen Störungsparameter ε entwickelt:

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots \quad (19)$$

Wir setzen nun voraus, daß die Lösungen der Eulerschen Gleichungen für das „ungestörte Problem“

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F_0}{\partial x'} = \frac{\partial F_0}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial F_0}{\partial y'} = \frac{\partial F_0}{\partial y}, \quad (20)$$

welche durch P_0 und P_1 gehen sollen, bekannt sind. Wir bezeichnen sie mit

$$x_u = x_u(x_0, y_0, x_1, y_1, z), \quad y_u = y_u(x_0, y_0, x_1, y_1, z). \quad (21)$$

Würden wir statt (20) die Eulerschen Gleichungen zu $F = F_0 + \varepsilon F_1$ aufstellen, so müßten sich deren Lösungen von $x_u = x_u(z)$, $y_u = y_u(z)$ unterscheiden und sie müßten, wenn wir nur die Abweichungen erster Ordnung in ε von x_u und y_u in Betracht ziehen, die Gestalt haben:

$$x = x_u + \varepsilon \xi, \quad y = y_u + \varepsilon \eta, \quad (22)$$

denn für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht ja F in F_0 und daher auch x und y in x_u bzw. y_u über. Wenn diese Lösungen (22) für das gestörte Problem auch durch P_0 und P_1 gehen sollen, so muß also $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ sein. Die Anfangsnormale der gestörten Bahn mit den Komponenten α_0 , β_0 , welche wir mit Π (s. Abb. 2) bezeichnen wollen, kann man nach (12) berechnen, wobei Integral (7) streng genommen über die gestörte Bahn $x = x_u + \varepsilon \xi$, $y = y_u + \varepsilon \eta$ zu erstrecken wäre. Wenn man aber statt x , y die ungestörte Bahn x_u , y_u einsetzt, ändert sich nach den Ausführungen zu Beginn dieses Abschnittes E nur um Glieder von der Ordnung ε^2 , somit auch α_0 und β_0 nur um Glieder zweiter Ordnung. Will man daher bloß die Änderungen der Anfangsnormalen um Glieder erster Ord-

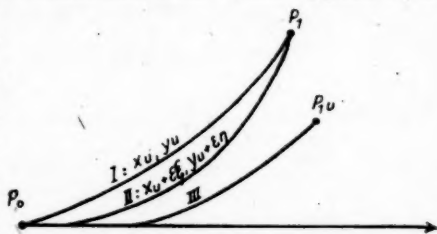


Abb. 2. I. ungestörte zu F_0 gehörende Bahn.
II. gestörte zu $F = F_0 + \varepsilon F_1$ gehörende Bahn.
III. ungestörte mit um $\varepsilon \Delta \alpha_0$, $\varepsilon \Delta \beta_0$ gegenüber I verschiedener Anfangsnormale

⁵⁾ W. Glaser, Z. Physik 80, 451 (1933) oder Z. Physik 97, 177 (1935).

nung bestimmen, so kann man in F zur Berechnung von E die bekannte ungestörte Bahn $x_u = x_u(z)$, $y_u = y_u(z)$ einsetzen. Die Anfangsnormale für II wollen wir mit

$$\alpha_0 = \alpha_{0u} + \varepsilon \Delta \alpha_0, \quad \beta_0 = \beta_{0u} + \varepsilon \Delta \beta_0 \quad (23)$$

bezeichnen. $\varepsilon \Delta \alpha_0$, $\varepsilon \Delta \beta_0$ stellt somit den Unterschied in den Normalenrichtungen von I ($x = x_u$, $y = y_u$) und II ($x = x_u + \varepsilon \xi$, $y = y_u + \varepsilon \eta$) dar. Für diese GröÙe ergibt sich aus (12)

$$\alpha_{0u} + \varepsilon \Delta \alpha_0 = -\frac{\partial}{\partial x_0} \int_{z_0}^{z_1} (F_0 + \varepsilon F_1) dz, \quad \beta_{0u} + \varepsilon \Delta \beta_0 = -\frac{\partial}{\partial y_0} \int_{z_0}^{z_1} (F_0 + \varepsilon F_1) dz,$$

und durch Vergleich der Koeffizienten von ε

$$\Delta \alpha_0 = -\frac{\partial}{\partial x_0} \int_{z_0}^{z_1} F_1 dz = -\frac{\partial E_1}{\partial x_0}, \quad \Delta \beta_0 = -\frac{\partial}{\partial y_0} \int_{z_0}^{z_1} F_1 dz = -\frac{\partial E_1}{\partial y_0}, \quad (24)$$

wobei wir mit E_1 das Integral

$$E_1 = \int_{z_0}^{z_1} F_1 dz \quad (25)$$

bezeichnet haben.

Gestörte und ungestörte Bahn sollen nun gleiche Anfangsrichtung haben. Da die Bahnrichtung eine eindeutige Funktion der Normalenrichtung ist, ändern wir dazu die Anfangsnormale der Bahn $x = x_u$, $y = y_u$, welche wir mit (I) bezeichnen, um den Betrag (24). Wir erhalten so die ungestörte Bahn (III), welche mit der gestörten Bahn (II) im Anfangspunkt parallel ist. Die ungestörte Bahn (III) ist durch $x = x_u(x_0, y_0, \alpha_{0u} + \varepsilon \Delta \alpha_0, \beta_{0u} + \varepsilon \Delta \beta_0, z)$ und analog $y = y(\dots)$ definiert. Ihr Endpunkt P_{1u} d. h. der Schnittpunkt mit der Ebene $z = z_1$, ist nunmehr gegenüber dem Endpunkt P_1 der gestörten Bahn mit der gleichen Anfangsrichtung verschoben. Die Verschiebungen von P_{1u} gegenüber von P_1 bezeichnen wir mit $-\Delta x_1$ und $-\Delta y_1$, so daß Δx_1 und Δy_1 die Verschiebung des Endpunktes infolge der Bahnstörung durch die Störungsfunktion F_1 darstellt. Für $-\Delta x_1$ und $-\Delta y_1$ ergibt sich aus ihrer Definition

$$\begin{aligned} -\Delta x_1 &= \frac{\partial x_u(z_1)}{\partial \alpha_0} \Delta \alpha_0 + \frac{\partial x_u(z_1)}{\partial \beta_0} \Delta \beta_0 \\ -\Delta y_1 &= \frac{\partial y_u(z_1)}{\partial \alpha_0} \Delta \alpha_0 + \frac{\partial y_u(z_1)}{\partial \beta_0} \Delta \beta_0. \end{aligned}$$

Wenn man aus (24) einsetzt, folgt für Δx_1

$$\Delta x_1 = \frac{\partial E_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_0} + \frac{\partial E_1}{\partial y_0} \frac{\partial x_1}{\partial \beta_0}.$$

Auf Grund von (15) kann man hierfür schreiben

$$\Delta x_1 = -\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial E_1}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1} \right). \quad (26)$$

$E_1(x_0, y_0, x_1, y_1)$ ist eine Funktion von x_0, y_0, x_1, y_1 . Führt man daher in E_1 statt der Integrationskonstanten x_1, y_1 die Integrationskonstanten α_1, β_1 ein und bezeichnet diese Funktion mit $E_1(x_1, y_1, \alpha_1, \beta_1)$ also

$$E_1(x_0, y_0, x_1, y_1) = E_1(x_1, y_1, \alpha_1, \beta_1). \quad (27)$$

gilt nach (26) und der analogen Ableitung für Δy_1

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= -\frac{\partial E_1}{\partial \alpha_1} \\ \Delta y_1 &= -\frac{\partial E_1}{\partial \beta_1},\end{aligned}\quad (28)$$

wobei E_1 durch

$$E_1 = \int_{z_0}^{z_1} F_1(x_u, y_u, x'_u, y'_u, z) dz \quad (29)$$

definiert ist und die ungestörte Bahn durch die Integrationskonstanten $x_1, y_1, \alpha_1, \beta_1$ festgelegt ist. Da man nun $x = x_u + \varepsilon \Delta x, y = y_u + \varepsilon \Delta y$ kennt, kann man so fortfahren, um auch die weitere durch $\varepsilon^2 F_2$ bedingte Bahnstörung zu bestimmen usw. Dabei liegt es im Wesen jedes derartigen sukzessiven Störungsverfahrens, daß man die gestörten Bahnen bis zur Ordnung n kennen muß, um die Störung $(n+1)$ ter Ordnung zu bestimmen.

Anwendung auf die Theorie der Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln in elektrischen und magnetischen Ablenkssystemen

1. Das elektrische und magnetische Ablenkkfeld

An die Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels in Braunschen Röhren stellt man folgende grundsätzliche Forderungen:

1. Die Ablenkung soll streng proportional sein der Ablenkspannung bzw. bei magnetischer Ablenkung dem Ablenkstrom.

2. Der Schreibfleck, welcher im unabgelenkten Zustand „punktförmig“ ist, soll auch im abgelenkten Zustand punktförmig bleiben. Beide Forderungen lassen

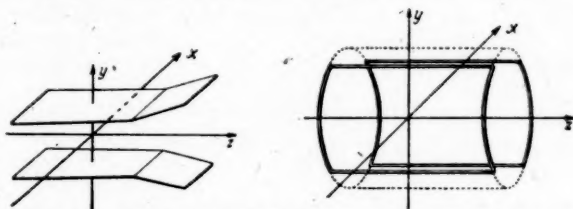


Abb. 3. Zur Orientierung des elektrischen und magnetischen Ablenkkfeldes

sich in der Praxis bei größeren Ablenkungen nicht streng verwirklichen, sondern es treten sowohl Abweichungen von der Proportionalität, wie auch Fleckverzerrungen auf. Man wird sich daher fragen: „Wie lassen sich die einzelnen Ablenkfehler einteilen, wie hängen sie von den Eigenschaften der ablenkenden Felder ab und wie hat man schließlich diese zu gestalten, damit die Fehler möglichst klein werden“? Das entwickelte Verfahren soll nun zur Berechnung dieser Bildfehler bei der Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels in Braunschen Röhren verwendet werden. Die Orientierung des Koordinatensystems zu den Ablenkplatten bzw. zu den Ablenkspulen werde durch Abb. 3 veranschaulicht. Für beide Ablenkssysteme ist wesentlich, daß sie in der xz -Ebene und in der yz -Ebene zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieebenen besitzen. Auf Grund dieser Symmetrie-

eigenschaften und ihrer Quellen- und Wirbelfreiheit ergeben sich für die ablenkenden Felder die Reihenentwicklungen ^{*)}:

$$\varphi = -E_0(z)y - \frac{1}{2}E_2(z)x^2y + \frac{1}{6}[E_0''(z) + E_2(z)]y^3 + \dots \quad (40)$$

Die Funktionen $E_0(z)$ und $E_2(z)$ sind dabei durch die ablenkende Feldkomponente $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ definiert:

$$E_y = E_0(z) + \frac{1}{2}E_2(z)x^2 - \frac{1}{2}[E_0''(z) + E_2(z)]y^2 + \dots \quad (41)$$

Es ist also $E_0(z)$ die ablenkende Feldkomponente E_y längs der z -Achse, d. h. der Schnittlinie der beiden Symmetrieebenen, die wir auch kurz als Feldachse bezeichnen wollen. Die Funktion $E_2(z)$ bestimmt die Änderung der ablenkenden Komponente in der x -Richtung, also senkrecht zur „Ablenkebene“. Wenn das Plattenpaar in der x -Richtung „unendlich“ ausgedehnt ist, kann E_y von x nicht abhängen und es ist $E_2(z) = 0$. Wir sagen $E_2(z)$ bestimmt das „Streufeld“ $E_x = E_2xy + \dots$ senkrecht zur Ablenkebene.

Das Magnetfeld ist durch die Komponenten des Vektorpotentials auf folgende Art gegeben

$$\begin{aligned} A_x &= 0 + \dots \\ A_y &= \frac{1}{2}H'_0x^2 + \dots \\ A_z &= H_0y - \frac{1}{2}H_2x^2y + \frac{1}{6}H_2y^3 + \dots, \end{aligned} \quad (42)$$

wobei die Punkte Glieder vierter und höherer Ordnung andeuten. $H_0(z)$ und $H_2(z)$ sind wieder durch die ablenkende Feldkomponente H_x auf folgende Weise definiert:

$$H_x = H_0(z) + \frac{1}{2}H_2(z)y^2 - \frac{1}{2}[H_0''(z) + H_2(z)]x^2 + \dots \quad (43)$$

Es ist also $H_0(z)$ die ablenkende Komponente längs der Feldachse und $H_2(z)$ bestimmt das „Streufeld“ $H_y = H_2xy + \dots$ in der Ablenkrichtung.

Die Ausdrücke für φ und \mathfrak{A} aus (40) und (42) haben wir in (18) einzusetzen

$$\begin{aligned} F &= \left(1 - \frac{E_0}{U}y - \frac{1}{2}\frac{E_2}{U}x^2y + \frac{1}{6}\frac{E_0'' + E_2}{U}y^3 + \dots\right)^{\frac{1}{2}} (1 + x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - k\left(H_0y + \frac{1}{2}H'_0x^2y' - \frac{1}{2}H_2x^2y + \frac{1}{6}H_2y^3 + \dots\right). \end{aligned} \quad (44)$$

Den Ausdruck für F entwickeln wir nun nach steigenden Potenzen von x, y, x' und y' , wobei wir Glieder höherer als vierter Ordnung nicht mehr in Betracht ziehen wollen. So erhält man

$$\begin{aligned} F &= 1 - \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0\right)y + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{8}\frac{E_0''}{U^2}y^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{E_0'' + E_2}{2U} - kH_2\right)y^3 \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{2U} - kH_2\right)x^2y - \frac{1}{2}kH'_0x^2y' - \frac{1}{4}\frac{E_0}{U}(x'^2 + y'^2)y \\ &\quad - \frac{1}{8}(x'^2 + y'^2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Die Funktion F schreiben wir in folgender Gestalt

$$F = F_0 + F_2 + F_4 + \dots \quad (46)$$

^{*)} Z. Physik 1938, 358-361.

$F_0 = 1$ ist auf die Elektronenbahn ohne Einfluß. F_2 und F_4 sind durch

$$F_2 = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) - \left(\frac{E_0}{2U} + k H_0 \right) y \quad (47)$$

$$F_4 = -\frac{1}{8} \frac{E_0''}{U^2} y^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{E_0''}{2U} + E_2 - k H_0 \right) y^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{E_2}{2U} - k H_2 \right) x^2 y - \frac{1}{2} k H_0' x^2 y' - \frac{1}{4} \frac{E_0}{U} (x'^2 + y'^2) y - \frac{1}{8} (x'^2 + y'^2)^2 \quad (48)$$

gegeben.

2. Die ideale Strahlablenkung

Wir behandeln zunächst den Fall von geringer Ablenkung. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß man sich in der Entwicklung (45) auf das Glied der niedrigsten Größenordnung F_2 beschränkt. Es wird sich ergeben, daß in diesem Falle die Ablenkung dem angelegten Feld streng proportional ist und keine Fleckverzerrung aufweist. Wir nennen sie daher die „ideale“ Strahlablenkung. Die Elektronenbahnen, welche diese „ideale“ Ablenkung erfahren, nennen wir die „achsennahen“ Bahnen, weil ihre Ablenkung stets als klein vorausgesetzt werden muß. Sie sind durch

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F_2}{\partial x'} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial F_2}{\partial y'} = \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad (49)$$

gegeben. Sie lauten also nach (47)

$$x'' = 0, \quad y'' = -\left(\frac{E_0}{2U} + k H_0 \right). \quad (50)$$

Die Integration gibt unmittelbar

$$x = x_s + x'_s (z - z_1), \quad y = y_s + y'_s (z - z_1) - \int_{z_0}^z dz \int_{z_0}^z \left(\frac{E_0}{2U} + k H_0 \right) dz, \quad (51)$$

wobei z_0 eine links außerhalb des Ablenkfeldes, sonst aber beliebig angenommene Abszisse darstellt, für welche die Strahlablenkung Null ist. Der unabgelenkte Strahl wird durch

$$x = x_s + x'_s (z - z_1), \quad y = y_s + y'_s (z - z_1) \quad (52)$$

gegeben, wobei x_s und y_s die Koordinaten des Strahldurchstoßpunktes mit dem Auffangschirm in $z = z_1$ und x'_s, y'_s die Strahlrichtung des unabgelenkten Strahles darstellen. Mittels einer partiellen Integration kann die Strahlablenkung $Y(z)$ auf die Gestalt

$$Y(z) = \int_{z_0}^z \left[\frac{E_0(\zeta)}{2U} + k H_0(\zeta) \right] (\zeta - z) d\zeta \quad (53)$$

gebracht werden. $Y'(z)$ ist nach (50) durch

$$Y'(z) = - \int_{z_0}^z \left[\frac{E_0(\zeta)}{2U} + k H_0(\zeta) \right] d\zeta \quad (54)$$

gegeben. Da die achsennahen Bahnen durch

$$\begin{aligned} x &= x_s + x'_s(z - z_1), & x' &= x'_s \\ y &= y_s + y'_s(z - z_1) + Y(z), & y' &= y'_s + Y'(z) \end{aligned} \quad (55)$$

dargestellt sind und für sie die Voraussetzung gilt, daß sowohl Achsenabstand x und y wie auch die Strahlneigung x' und y' beständig klein bleiben, muß vorausgesetzt werden, daß auch der Achsenabstand $\sqrt{x_s^2 + y_s^2}$ d. h. x_s und y_s und die Neigung x'_s, y'_s des eintretenden Strahles gegen die Achse von der gleichen Größenordnung klein sind. Dies muß auch deshalb verlangt werden, weil durch unsere Reihen das Feld in der Nähe der Achse dargestellt wird, so daß eben auch der Elektronenstrahl in der Nähe der Achse verlaufen muß. Für den Fall, daß man Achsenneigung x'_s, y'_s und Achsenabstand x_s, y_s des eintretenden Strahles nicht als klein voraussetzt, dürfte man das Feld nicht um die Achse in eine Reihe entwickeln, sondern dies müßte für die Umgebung des unabgelenkten Strahles geschehen.

Man erkennt aus (53), daß die ideale Ablenkung von den Koordinaten x_s, y_s, x'_s und y'_s , welche den unabgelenkten Strahl im einfallenden Elektronenbündel festlegen, unabhängig ist und den ablenkenden Feldstärken E_0 und H_0 bzw. den dazugehörigen Spannungen und Strömen streng proportional ist. Wenn man daher mittels elektrischer oder magnetischer Konzentrationsoptik ein kegelförmiges Elektronenstrahlbündel mit seiner Spitze auf den Ablenkschirm richtet, so bleibt auch im abgelenkten Zustand die Spitze auf dem Schirm, d. h. der im unabgelenkten Zustand punktförmige Schreibleck bleibt bei der idealen Ablenkung auch im abgelenkten Zustand punktförmig und die Ablenkung ist der Ablenkspannung bzw. dem Ablenkstrom streng proportional. Bei der idealen Ablenkung treten also weder Proportionalitätsfehler, noch Fleckverzerrungen auf.

Ein achsenparallel eintretender Strahl besitzt im Durchstoßpunkt mit dem Bildschirm die Richtung

$$Y'(z) = Y'_1 = - \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0 \right) d\zeta$$

und den Abstand

$$Y(z_1) = Y_1 = - \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0 \right) (z_1 - \zeta) d\zeta.$$

Die Tangente im Durchstoßpunkt schneidet daher die geradlinige Verlängerung des eintretenden Strahles im Punkte $z = z_H$, dessen Abstand von z_1 durch

$$z_1 - z_H = \frac{Y_1}{Y'_1} = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0 \right) (z_1 - \zeta) d\zeta \bigg/ \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0 \right) d\zeta$$

gegeben ist. Seine Abszisse z_H stimmt also mit

$$z_H = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0 \right) \zeta d\zeta \bigg/ \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0 \right) d\zeta, \quad (56)$$

d. h. dem „Schwerpunkt“ einer längs der Achse gegebenen „Dichteverteilung“ $\frac{E_0(z)}{2U} + kH_0(z)$ überein. Von der Ebene $z = z_H$ durch den Schwerpunkt dieser Ver-

teilung scheinen also vom Bildschirm aus gesehen die abgelenkten Elektronenstrahlen herzukommen. Die Ebene $z = z_H$ soll Hauptebene genannt werden⁷⁾.

Es möge noch gezeigt werden, daß sich Formel (53) für die ideale Ablenkung auch unmittelbar ohne partielle Integration aus unserem Störungsverfahren ergibt. Die Funktion F lautet für den unabgelenkten Strahl, d. h. für den feldfreien Fall

$$F_u = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} = 1 + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{8}(x'^2 + y'^2)^2 + \dots \quad (57)$$

Die zugehörigen Extremalen, also die unabgelenkten Strahlen, sind Gerade (52). Da man sich für kleine Neigungen in (57) auf das zweite Glied beschränken kann, sind die Komponenten des Normalvektors

$$\alpha = x', \quad \beta = y',$$

so daß man x'_s und y'_s auch als die Komponenten des Normalenvektors im Endpunkt ansehen kann. Schaltet man nun das Feld ein, so tritt zu (57) das Störungsglied $S = -\left(\frac{E_0}{2U} + kH_0\right)y$ hinzu. Die Störung der unabgelenkten Bahn (52), also die Ablenkung Y_1 ist daher nach (28) durch

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= -\frac{\partial}{\partial x'_s} \int_{z_0}^{z_1} S dz = 0, \quad \Delta y_1 = Y_1 = -\frac{\partial}{\partial y'_s} \int_{z_0}^{z_1} S dz \\ &= \frac{\partial}{\partial y'_s} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0\right) [y_s + y'_s(z - z_1)] dz \end{aligned}$$

oder wenn man die Differentiation nach y'_s unter dem Integral ausführt durch

$$Y_1 = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{E_0}{2U} + kH_0\right) (z - z_1) dz$$

gegeben: Es ist klar, daß man die Ablenkung $Y(z)$ nur von solcher Größenordnung voraussetzen kann, wie die Koordinate y in der Entwicklung von F . Aus Gl. (53) folgt, daß Y die Größenordnung von $\frac{E_0}{2U} + kH_0$ hat. Es ist daher — wie bereits durch die Schreibweise angedeutet worden ist — in Gl. (47) und (48) der Ausdruck F_2 von zweiter und der Ausdruck F_4 von vierter Ordnung in y bzw. der Strahlablenkung Y ⁸⁾.

3. Ablenkfehler und Fleckverzerrungen bei größeren Ablenkungen

Wenn man das Kathodenstrahlbündel stärker ablenkt, müssen auch die Glieder vierter Ordnung F_4 in (45) bzw. (46) bei der Berechnung des Strahlschnittpunktes mit der Auffangebene berücksichtigt werden. Dabei muß man beachten, daß das letzte Glied $-\frac{1}{8}(x'^2 + y'^2)^2$ in F_4 einfach von der Entwicklung der Wurzel $\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}$ herrührt. Infolge der stärkeren Strahlneigung muß es in F bei größerer Ablenkung berücksichtigt werden. Aber es würde auch bei ausgeschaltetem Feld vorhanden sein (s. Gl. (57)). Wenn also der nicht abgelenkte Strahl eine

⁷⁾ Auch in der Elektronenoptik rotationsymmetrischer Systeme ist der Hauptpunkt kurzer Linsen als Schwerpunkt einer gewissen Verteilung längs der Achse gegeben. Vgl. hierzu P. Bergmann u. R. Wallauschek, Z. Physik **94**, 329 (1935).

⁸⁾ Vergl. dagegen die in den Arbeiten P-H I und P-H II, 1941 von J. Picht u. J. Himpan vertretene Ansicht.

von Null verschiedene Richtung x'_s, y'_s hat, so würde er in F_4 den Beitrag $-\frac{1}{8}(x'_s{}^2 + y'_s{}^2)^2$ liefern. Es ist klar, daß dieser Term

$$-\frac{1}{8}(x'_s{}^2 + y'_s{}^2)^2, \quad (58)$$

der auch im feldfreien Fall bei der Entwicklung der Wurzel $\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}$ auftritt nicht zur Störungsfunktion F_4 zu zählen ist.

Die Verschiebungen, welche der Schnittpunkt der idealen Ablenkung mit der Auffangebene bei Berücksichtigung von F_4 erfährt, wollen wir mit Δx und Δy bezeichnen. Sie ergeben sich auf Grund des obigen Verfahrens zu

$$\Delta x = -\frac{\partial E_4}{\partial x'_1}, \quad \Delta y = -\frac{\partial E_4}{\partial y'_1}, \quad (59)$$

wobei E_4 durch

$$E_4(x_1, y_1, x'_1, y'_1) = \int_{z_0}^{z_1} F_4 dz \quad (60)$$

gegeben ist und in F_4 die ideale Bahn eingesetzt wird, welche durch ihre Koordinaten x_1, y_1 in der Auffangebene und durch ihre hier vorhandene Neigung x'_1, y'_1 festgelegt ist. Die Normalenkomponenten $\alpha_1 = \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'}\right)_1 = x'_1, \beta_1 = \left(\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right)_1 = y'_1$ sind ja in unserem Falle mit den Richtungskomponenten x'_1, y'_1 identisch. In F_4 ist natürlich — wie bereits erwähnt — der ungestörte Anteil, also das Glied $-\frac{1}{8}(x'_s{}^2 + y'_s{}^2)^2$ wegzulassen. Da nach (55) gilt

$$x'_1 = x'_s, \quad y'_1 = y'_s + Y_1$$

können wir in F_4 von Gl. (60) auch die durch x_s, y_s, x'_s, y'_s festgelegte ideale Bahn (55) einsetzen und nach x'_s und y'_s differenzieren

$$\Delta x = -\frac{\partial}{\partial x'_s} \int_{z_0}^{z_1} F_4 dz = -\frac{\partial E_4}{\partial x'_s}, \quad \Delta y = -\frac{\partial}{\partial y'_s} \int_{z_0}^{z_1} F_4 dz = -\frac{\partial E_4}{\partial y'_s}. \quad (61)^9$$

Wenn man zur Abkürzung schreibt

$$C_1(z) = \frac{1}{8} \frac{E_0^2}{U^2}, \quad C_2(z) = -\frac{1}{6} \left(\frac{E_0'' + E_2}{2U} - k H_2 \right)^{10}, \quad (62)$$

$$C_3(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{E_2}{2U} - k H_2 \right), \quad C_4(z) = \frac{1}{2} k H_0, \quad C_5(z) = \frac{1}{4} \frac{E_0}{U},$$

erhält $-F_4$ die Gestalt

$$-F_4 = C_1 y^2 + C_2 y^3 + C_3 x^2 y + C_4 x^2 y' + C_5 (x'^2 + y'^2) y + \frac{1}{8} (x'^2 + y'^2)^2. \quad (63)$$

⁹ Die Formeln (61) kann man für den besonderen hier betrachteten Fall der „Ablenkung“ sehr einfach aus (12b) ohne Benutzung von (15) herleiten, wenn man die explizite Gestalt der ungestörten Bahn (55) bzw. $x = x_0 + x'_0(z - z_0)$ und $y = y_0 + y'_0(z - z_0) + Y(z)$ in Betracht zieht. Da $Y(z)$ von x_0, y_0 unabhängig ist, folgt für $-\Delta x_1$ und $-\Delta y_1$: $-\Delta x_1 = \Delta x'_0(z_1 - z_0)$ und $-\Delta y_1 = \Delta y'_0(z_1 - z_0)$. Wenn man für $\Delta x'_0 = \Delta x'_0$ und $\Delta y'_0 = \Delta y'_0$ nach (24) einsetzt, ergibt sich $\Delta x_1 = \frac{\partial E_4}{\partial x_0}(z_1 - z_0), \Delta y_1 = \frac{\partial E_4}{\partial y_0}(z_1 - z_0)$. Aus $x_1 = x_0 + x'_0(z_1 - z_0)$ und $y_1 = y_0 + y'_0(z_1 - z_0) + Y_1$ folgt nun $x_0 = x_1 - x'_0(z_1 - z_0)$ bzw. $y_0 = y_1 - y'_0(z_1 - z_0) - Y_1$, also gilt $\frac{\partial x_0}{\partial x'_1} = -(z_1 - z_0)$ und $\frac{\partial y_0}{\partial y'_1} = -(z_1 - z_0)$, somit $\Delta x_1 = -\frac{\partial F_4}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x'_1}, \Delta y_1 = -\frac{\partial F_4}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial y'_1}$ oder $\Delta x_1 = -\frac{\partial E_4}{\partial x'_1}, \Delta y_1 = -\frac{\partial E_4}{\partial y'_1}$.

¹⁰ Das in Z. Ph. (1938) in C_2 noch aufgeführte Glied $\frac{1}{16} \frac{E_0^2}{u^2}$ kann als klein von höherer Ordnung weggelassen werden.

Von den Funktionen C_k sind dabei C_2, C_3, C_4, C_5 von erster Ordnung, und C_1 von zweiter Ordnung in der Strahlablenkung Y_1 . Indem man den Ausdruck (63) in (60) einführt, x, y, y' gemäß Gl. (55) ausdrückt und das vom unabgelenkten Strahl herrührende Glied (58) in F_4 wegläßt, erhält man für $-E_4$ einen Ausdruck der Gestalt

$$\begin{aligned} -E_4 = & a_1 y'_s + a_2 x_s x'_s + a_3 y_s y'_s + \frac{1}{2} a_4 x_s'^2 + \frac{1}{2} a_5 y_s'^2 + a_6 x_s^2 y'_s + a_7 x_s y_s x'_s \\ & + a_8 x_s'^2 y'_s + a_9 x_s x'_s y'_s + \frac{1}{2} a_{10} x_s'^2 y_s + a_{11} y_s^2 y'_s + \frac{1}{2} a_{12} y_s y_s'^2 \\ & + a_{13} y_s'^3 + \dots, \end{aligned} \quad (64)$$

wobei die Punkte jene Glieder andeuten, welche allein von x_s und y_s abhängen und daher bei der Differentiation (61) wegfallen. Die Koeffizienten a_k sind dabei mit den allein vom Felde abhängenden Funktionen (62) durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} a_1 = & \int_{z_0}^{z_1} \{ (2 C_1 + 3 C_2 Y) Y (z - z_1) + C_3 [2 Y + Y' (z - z_1)] Y' + \frac{1}{2} Y'^2 \} dz, \\ a_2 = & 2 \int_{z_0}^{z_1} (C_3 Y + C_4 Y') (z - z_1) dz, \\ a_3 = & 2 \int_{z_0}^{z_1} [(C_1 + 3 C_2 Y) (z - z_1) + C_5 Y'] dz, \\ a_4 = & 2 \int_{z_0}^{z_1} [(C_3 Y + C_4 Y') (z - z_1)^2 + C_5 Y + \frac{1}{2} Y'^2] dz, \\ a_5 = & 2 \int_{z_0}^{z_1} \{ (C_1 + 3 C_2 Y) (z - z_1)^2 + C_3 [Y + 2 Y' (z - z_1)] + \frac{3}{2} Y'^2 \} dz, \\ a_6 = & \int_{z_0}^{z_1} [C_3 (z - z_1) + C_4] dz, \\ a_7 = & 2 \int_{z_0}^{z_1} C_3 (z - z_1) dz, \\ a_8 = & \int_{z_0}^{z_1} [C_3 (z - z_1)^3 + C_4 (z - z_1)^2 + C_5 (z - z_1) + \frac{1}{2} Y'] dz, \\ a_9 = & 2 \int_{z_0}^{z_1} [C_3 (z - z_1) + C_4] (z - z_1) dz, \\ a_{10} = & 2 \int_{z_0}^{z_1} [C_3 (z - z_1)^2 + C_5] dz, \\ a_{11} = & 3 \int_{z_0}^{z_1} C_2 (z - z_1) dz, \\ a_{12} = & 2 \int_{z_0}^{z_1} [3 C_2 (z - z_1)^2 + C_5] dz, \\ a_{13} = & 3 \int_{z_0}^{z_1} [C_2 (z - z_1)^3 + C_5 (z - z_1) + \frac{1}{2} Y'] dz. \end{aligned} \quad (65)$$

Auf Grund von (61) ergeben sich aus (64) die Ablenkfehler in folgender Gestalt

$$\Delta x = a_2 x_s + a_4 x'_s + a_7 x_s y_s + 2 a_8 x'_s y'_s + a_9 x_s y'_s + a_{10} x'_s y'_s \quad (66)$$

$$\Delta y = a_1 + a_3 y_s + a_5 y'_s + a_6 x_s^2 + a_8 x_s'^2 + a_9 x_s x'_s + a_{11} y_s^2 + a_{12} y_s y'_s + a_{13} y'_s^2,$$

wobei die Koeffizienten a durch (65) mit (62), (53) und (54) gegeben sind¹¹⁾. Die Größen a_1 bis a_{13} , welche die Größe der Ablenkfehler bestimmen, sollen kurz als „Ablenkfehler“ bezeichnet werden¹²⁾.

Da der „Ideale Ablenkwinkel“ $\alpha = |Y'_1|$ der elektrischen und magnetischen Feldstärke streng proportional ist, ergibt sich aus (65), daß die Fehlerkoeffizienten auch in folgender Form geschrieben werden können:

$$a_1 = \alpha^3 b_1, a_2 = \alpha^2 b_2, a_3 = \alpha^2 b_3, a_4 = \alpha^2 b_4, a_5 = \alpha^2 b_5, a_6 = \alpha b_6, a_7 = \alpha b_7, \quad (67)$$

$$a_8 = \alpha b_8, a_9 = \alpha b_9, a_{10} = \alpha b_{10}, a_{11} = \alpha b_{11}, a_{12} = \alpha b_{12}, a_{13} = \alpha b_{13},$$

wobei nun die Größen b_i bis b_{13} nur mehr von der Feldgeometrie und nicht mehr von den numerischen Werten der Ablenkspannung und des Ablenkstromes abhängen.

4. Einfluß eines endlichen Strahlquerschnittes

Es werde nun angenommen, daß ein um die Achse symmetrisches, kegelförmiges Kathodenstrahlbündel im unabgelenkten Zustand gerade mit der Spitze auf die Leuchtschirmmitte $x_s = y_s = 0$ auffalle. In der achsenssenkrechten Ebene $z = z_0$ sei r der Radius des kreisförmigen Bündelquerschnittes. Führt man in dieser Ebene Polarkoordinaten ein, so gilt

$$x_0 = x \cos \varphi, \quad y_0 = x \sin \varphi.$$

Andererseits ist für $x_s = y_s = 0$ nach (52) an der Stelle $z = z_0$

$$x_0 = x'_s (z_0 - z_1), \quad y_0 = y'_s (z_0 - z_1)$$

oder

$$x'_s = -\frac{x_0}{z_1 - z_0} = -\frac{z}{z_1 - z_0} \cos \varphi = -\operatorname{tg} \omega \cos \varphi = -\omega \cos \varphi \quad (68)$$

$$y'_s = -\frac{y_0}{z_1 - z_0} = -\frac{z}{z_1 - z_0} \sin \varphi = -\operatorname{tg} \omega \sin \varphi = -\omega \sin \varphi,$$

wobei ω den halben Öffnungswinkel des kegelförmigen Strahlenbüschels (φ variabel!) bedeutet. Für die Aberrationskurven erhält man aus (66) mit $x_s = y_s = 0$ und den Ausdrücken (68) für x'_s und y'_s :

$$\Delta x = b_8 \alpha \omega^2 \sin 2\varphi - b_4 \alpha^2 \omega \cos \varphi \quad (69)$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} [(b_8 + b_{13}) + (b_8 - b_{13}) \cos 2\varphi] \alpha \omega^2 - b_5 \alpha^2 \omega \sin \varphi + b_1 \alpha^3.$$

¹¹⁾ In der angegebenen Weise haben wir im Jahre 1938, Z. Physik 111, 357, die Ablenkfehler bestimmt. Da ich die Korrekturen nicht persönlich durchsehen konnte, sind bei den Fehlerkoeffizienten einige Druck- und Schreibfehler stehen geblieben. Vgl. die Berichtigung in Z. Physik 117, 412 (1941).

¹²⁾ Würde man unkorrekterweise in F_1 das Glied $-\frac{1}{6}(x_s'^2 + y_s'^2)^2$ aufnehmen, so ergäbe das für $-E_4$ das Zusatzglied $\frac{1}{6}(x_s'^2 + y_s'^2)^2(z_1 - z_0)$ und aus (61) ergäben sich in Δx und Δy die weiteren Glieder $\frac{1}{6}(x_s'^2 + y_s'^2)x'_s(z_1 - z_0) = \frac{1}{6}(z_1 - z_0)x_s'^3 + \frac{1}{6}(z_1 - z_0)x'_s y_s'^2$ bzw. $\frac{1}{6}(z_1 - z_0)y_s'^3 + \frac{1}{6}(z_1 - z_0)x_s'^2 y'_s$, siehe S. 407.

Betrachtet man die Glieder, welche in der Ablenkung α von erster, im Öffnungswinkel des Strahlbündels 2ω von zweiter Ordnung sind, so ergibt die Elimination des Winkels φ die Kurven:

$$\frac{\Delta x^2}{(b_8 \alpha \omega^2)^2} + \frac{[\Delta y - \frac{1}{2}(b_8 + b_{13}) \alpha \omega^2]^2}{[\frac{1}{2}(b_8 - b_{13}) \alpha \omega^2]^2} = 1, \quad (70)$$

läßt man ω alle Werte von 0 bis ω_m durchlaufen, um so alle Strahlen des Bündels mit der Öffnung $2\omega_m$ zu erhalten, so stellt (70) eine Schar von Ellipsen dar, deren Halbachsen von 0 bis $b_8 \alpha \omega_m^2$ bzw. $\frac{1}{2}(b_8 - b_{13}) \alpha \omega_m^2$ wachsen und deren Mittelpunkt jeweils auf der y -Achse in der Entfernung $\frac{1}{2}(b_8 + b_{13}) \alpha \omega^2$ vom idealen Leuchtfleck liegen. Dieser Fehler hat das Aussehen einer „Koma“. Er ist daher in der angeführten Arbeit „Ablenkkoma“ genannt worden. Für den Fall, daß $b_8 = -b_{13}$ ist, entartet die Komafigur in einen Kreis mit dem Radius $b_8 \alpha \omega_m^2$ um den idealen Leuchtfleck.

Die Glieder, welche in ω von erster und in der Ablenkung α von zweiter Ordnung sind, liefern die Aberrationskurven

$$\frac{\Delta x^2}{(b_1 \alpha^2 \omega)^2} + \frac{\Delta y^2}{(b_5 \alpha^2 \omega)^2} = 1. \quad (71)$$

Das sind Ellipsen mit dem Achsenverhältnis b_4/b_5 . Die Flächengröße des elliptischen Leuchtfleckes ist proportional zu $b_4/b_5 \alpha^2 \omega_m$. Diese Erscheinung haben wir Ablenkastigmatismus genannt.

Der dritte durch

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0 \\ \Delta y &= b_1 \alpha^3 \end{aligned} \quad (72)$$

gegebene Ablenkfehler, welcher die Schärfe des Schreibfleckes nicht beeinträchtigt, ist ein Proportionalitätsfehler. Er hängt vom Strahlquerschnitt nicht ab und ergibt bloß eine zusätzliche, nicht lineare Verschiebung in der Ablenkrichtung, welche der dritten Potenz der Ablenkung proportional ist. Er heißt Ablenkverzeichnung oder Proportionalitätsfehler. Man sieht, daß die durch den endlichen Strahlquerschnitt verursachten Ablenkfehler durch die vier Größen b_8, b_{13}, b_4 und b_5 bestimmt sind. Die Ablenkkoma ist durch b_8 und b_{13} gegeben. Der Ablenkastigmatismus durch b_4 und b_5 und die Ablenkverzeichnung schließlich durch b_1 . In analoger Weise kann man auch die anderen einer exzentrischen Lage des unabgelenkten Strahles entsprechenden Aberrationskurven diskutieren. Das ist in der Arbeit von G. Wendt¹³⁾ durchgeführt worden.

Die Ablenkfehler erhalten eine sehr einfache Gestalt für das rein magnetische Ablenkfeld, wenn vorausgesetzt wird, daß die Inhomogenität in der y -Richtung so gering ist, daß überall $H_z = 0$ gesetzt werden kann. Man erhält so aus (65)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \int_{z_0}^{z_1} Y'^3 dz, & a_2 &= k \int_{z_0}^{z_1} H'_0 Y' (z - z_1) dz, & a_3 &= 0, \\ a_4 &= \int_{z_0}^{z_1} [k H'_0 Y' (z - z_1)^2 + \frac{1}{2} Y'^2] dz, & a_5 &= \frac{3}{2} \int_{z_0}^{z_1} Y'^2 dz, & a_6 &= 0, & a_7 &= 0, \\ a_8 &= \frac{1}{2} \int_{z_0}^{z_1} [k H'_0 (z - z_1)^2 + Y'] dz, & a_9 &= k \int_{z_0}^{z_1} H'_0 (z - z_1) dz, \\ a_{10} &= 0, & a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= \frac{3}{2} Y_1. \end{aligned} \quad (73)$$

¹³⁾ G. Wendt, Die Telefunkenröhre, Heft 15, 100 (1939).

Das „praktisch homogene“ Ablenkkfeld als Beispiel

Die magnetische Ablenkung wird gewöhnlich unter der Voraussetzung eines seitlich scharf begrenzten („abgehackten“) homogenen Magnetfeldes behandelt. Würde man nun, um die Ablenkfehler dieses Feldes zu bestimmen, in (73) einfach $H'_0 = 0$ setzen (homogenes Feld!), so wäre dies unrichtig. Denn man muß bedenken, daß ein plötzlich abbrechendes Feld eine bloße Fiktion ist. Der Feldverlauf längs der Achse wäre nämlich eine unstetige Funktion und an den Feldenden wäre die Ableitung unendlich groß. Der in Gl. (43) auf Grund der Quellen- und Wirbelfreiheit geforderte, zweite Differentialquotient $H''_0(z)$ wäre an diesen Stellen überhaupt nicht definiert. Man kann sich also ein plötzlich abbrechendes Feld nur als Grenzfall eines sich an den „Feldenden“ sehr rasch ändernden Feldes denken. Hier wird der Differentialquotient zwar sehr groß sein, immer aber noch endlich bleiben. Um also folgerichtig vorzugehen, wird man in (73) den Differentialquotienten H'_0 durch eine partielle Integration eliminieren und erst in den Endformeln, welche nur mehr H_0 enthalten, zum abbrechenden Feld übergehen. So verstößt man nicht gegen die Potentialtheorie. Man hat auf diese Weise die Rechnung unter der Voraussetzung eines sich längs der Achse stetig ändernden Feldes durchgeführt und erst zur angenäherten Auswertung der Integrale am Schluß der Rechnung die Voraussetzung eingeführt, daß das Feld nur längs eines Stückes der Achse den von Null verschiedenen, konstanten Wert $H_0 = H$ besitzt. So wird in den Formeln (73) auch der durch $H'_0 \neq 0$ bedingte Streufeldeinfluß erfaßt, welcher bewirkt, daß auch die Koeffizienten a_2 und a_9 von Null verschieden sind. Würde man dagegen in unzulässiger Weise von vornherein mit der Annahme eines homogenen Feldes die Theorie entwickeln, so würden a_2 und a_9 auch von vornherein Null sein.

Um die Formeln (73) für diesen Fall auszuwerten, soll vorausgesetzt werden, daß das Feld von $z = z_0 = 0$ bis $z = l$ reiche. Die Entfernung des Leuchtschirmes vom Feldende sei L . Es ist also $z_1 = l + L$. Für den Differentialquotienten Y' der Ablenkung erhält man aus (54)

$$\begin{aligned} Y' &= -k H z & \text{für } z \leq l \\ Y' &= -k H l & \text{für } z \geq l \end{aligned} \quad (74)$$

und für die Ablenkung an der Stelle z ergibt sich

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{k}{2} H z^2 & \text{für } z \leq l \\ Y &= -k H l z + \frac{k}{2} H l^2 & \text{für } z \geq l. \end{aligned} \quad (75)$$

Die Ablenkung Y_1 am Fluoreszenzschirm wird

$$Y_1 = -k H l \left(\frac{l}{2} + L \right). \quad (76)$$

Indem man (74) und (75) in (73) einsetzt und den Ablenkwinkel

$$\alpha = |\tan \alpha| = |Y'_1| = k H l$$

eingführt, erhält man

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} \left(L + \frac{l}{4} \right) \alpha^3, & a_2 &= -\frac{L}{l} \alpha^2, & a_4 &= \frac{1}{2} \left(L + \frac{l}{3} + \frac{2L^2}{l} \right) \alpha^2, \\ a_5 &= \frac{3}{2} \left(L + \frac{l}{3} \right) \alpha^2, & a_8 &= \frac{1}{2} \left(L + \frac{l}{2} \right) \alpha, & a_9 &= -\alpha, & a_{12} &= -\frac{3}{2} \left(L + \frac{l}{2} \right) \alpha. \end{aligned} \quad (77)$$

Und die Abweichungen (66) sind somit durch

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\frac{L}{l} \alpha^2 x_s + \frac{1}{2} \left(L + \frac{l}{3} + \frac{2L^2}{l} \right) \alpha^2 x'_s + \left(L + \frac{l}{2} \right) \alpha x'_s y'_s - \alpha x_s y'_s \\ \Delta y &= -\frac{1}{2} \left(L + \frac{l}{4} \right) \alpha^3 + \frac{3}{2} \left(L + \frac{l}{3} \right) \alpha^2 y'_s + \frac{1}{2} \left(L + \frac{l}{2} \right) \alpha x_s'^2 - \alpha x_s x'_s \\ &\quad - \frac{3}{2} \left(L + \frac{l}{2} \right) \alpha y_s'^2 \end{aligned} \quad (78)$$

gegeben.

Vergleich mit der Arbeit „Beiträge zur Theorie der elektrischen Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln“ von J. Picht und J. Himpan¹⁾

Die im vorhergehenden auf S. 395–404 wiedergegebene Darstellung der elektrischen und magnetischen Ablenkfehler wurde zuerst in der oben angeführten Arbeit im Jahre 1938 veröffentlicht. Gleichzeitig und unabhängig davon wurden die Abbildungsfehler magnetischer Ablenkkfelder von G. Wendt^{1a)} in seiner Berliner Dissertation berechnet und experimentell untersucht. In beiden Arbeiten wird auch das seitliche Streufeld berücksichtigt. In seiner Arbeit geht Wendt gleichfalls vom Fermatschen Prinzip für die Elektronenbewegung aus, berechnet aber die Bahnabweichungen dritter Ordnung nach der Methode der „schrittweisen Annäherung“. Im Jahre 1941 erschien eine umfangreiche Abhandlung von J. Picht und J. Himpan über die Ablenkfehler bei rein elektrischer Ablenkung ohne Berücksichtigung des seitlichen Streufeldes^{1a)}. Problemstellung und Ausgangspunkt sind die gleichen wie in den angeführten Arbeiten. Das zugrunde gelegte Ablenkkfeld, Begriff wie Berechnung der Idealablenkung, sowie Begriff und Darstellung der Ablenkfehler stimmen mit unserer Arbeit überein. Die Berechnung der Abweichungen von der Idealablenkung geschieht analog — wie dies Wendt für die rein magnetische Ablenkung durchgeführt hat — mittels „schritt-

^{1a)} In der angeführten Weise wurde das „praktisch homogene“ Ablenkkfeld in der Arbeit Z. Ph. (1938) behandelt. Das Resultat wurde hier nochmals angeführt, um gleichzeitig einige Druck- und Rechenfehler richtig zu stellen. Die Ablenkung bei anderen speziellen magnetischen Ablenkspulen wurde von G. Wendt in der Arbeit „Die Telefunkenröhre“, Heft 19/20, S. 100 (1940) untersucht.

^{1b)} „Die Telefunkenröhre“, Heft 15, S. 100 (1939). In dieser von J. Picht u. J. Himpan angeführten Arbeit steht auf S. 101 in der Fußnote die Bemerkung: „Vgl. die inzwischen unabhängig von dieser erschienenene Arbeit von W. Glaser über Ablenkfehler, Z. Physik **111**, 357 (1938)“. Von Picht und Himpan wird 1941 bei Anführung unserer Arbeit von 1938 folgendes bemerkt: „Diese Arbeit, auf die uns nach Fertigstellung unserer Untersuchungen Herr Dr. Knoll aufmerksam machte, enthält in den abgeleiteten Fehlerkoeffizienten verschiedene Fehler. Eine Berichtigung erscheint demnächst in Z. Physik. — Nachschrift b. d. Korr.: Inzwischen erschienen in Z. Physik **117**, 412 (1941)“.

^{1c)} P-H I und II (1941): Die Verfasser begründen die Veröffentlichung ihrer Arbeit gegenüber unserer auf folgende Weise: „Glaser und Wendt setzten bei ihren Untersuchungen voraus, daß die Ablenkungen von gleicher Ordnung klein sind wie die Strahlabstände des unabgelenkten Strahlbündels gegen die Symmetrieachse. Unter dieser Voraussetzung behandeln sie die Ablenkfehler bis einschließlich zur dritten Ordnung. — In den vorliegenden Arbeiten und den anschließenden Untersuchungen sollen die elektrische Ablenkung und die hierdurch bedingten Fehler gleichfalls bis zur dritten Ordnung untersucht und eingehend diskutiert werden, wobei aber zunächst nicht vorausgesetzt wird, daß auch die Ablenkung klein ist von gleicher Größenordnung wie die Strahlneigung und Strahlabstand im unabgelenkten Strahlbündel“.

weiser Näherung“, indem in die Differentialgleichungen der Elektronenbahnen in den höheren Potenzen von Achsenabstand und Strahlneigung zur Durchführung der Integration die bekannten achsensnahen Bahnen eingesetzt werden. Während jedoch in unserer Arbeit und in der entsprechenden für die rein magnetische Ablenkung von Wendt die Reihenentwicklungen der Elektronenbahnen gegenüber denjenigen für die Idealablenkung nur bis zur nächsten Größenordnung, also bis zu Gliedern dritter Ordnung in Strahlabstand und Strahlneigung angeführt werden, schreiben Picht und Himpan in der Entwicklung auch noch Glieder an, welche in den angeführten Größen von siebenter Ordnung sind. Formell enthalten sie zwar y auch nur bis zur dritten Potenz, aber es wird übersehen, daß die Größe $P/4\Phi$ — welche in unserer Schreibweise $E_0/2U$ lautet — ebenfalls die Größenordnung von y besitzt, so daß also z. B. bereits das Glied $P^2/\Phi^2 \cdot y$ als ein solches von dritter Ordnung anzusehen ist. (Vgl. die Ausführungen auf S. 399 f. dieser Arbeit.) Obwohl in P—H I und P—H II (1941) noch Glieder siebenter Ordnung angeschrieben werden, wird die Rechnung aber trotzdem so geführt, als ob es sich hierbei bloß um eine Störung erster Ordnung handelte, d. h. es werden in alle Glieder höherer Ordnung in Strahlabstand und Strahlneigung die idealen Bahnen eingesetzt. Die so erhaltenen Ablenkfehler enthalten auf diese Weise Glieder bis zur siebenten Ordnung in den Koordinaten x, y, x', y' und der Strahlablenkung Y_1 . An Fehlerkoeffizienten treten so, trotz Vernachlässigung der seitlichen Streuung nicht weniger als 19 auf. (Statt der richtigen Anzahl von 9 Gliedern.) Es ist klar, daß man bei Kenntnis der idealen Bahn, welche die Glieder erster Ordnung enthält, nur die Ablenkfehler der nächst höheren Ordnung, also diejenigen, welche die Glieder dritter Ordnung enthalten, bestimmen kann¹⁷⁾. (Vgl. S. 394 dieser Arbeit.) Erst nachdem man die Ablenkfehler dritter Ordnung bestimmt hat, könnte man mit ihrer Verwendung diejenigen fünfter Ordnung bestimmen usw. Bei konsequenter Rechnung werden so die Ablenkfehler in x, y, x', y' und der Ablenkung Y_1 bzw. dem Ablenkwinkel α von dritter Ordnung. In Anmerkung 2 auf S. 438 des Beitrages P—H II (1941) wird im Hinblick darauf von den Verfassern selbst gesagt, daß ihre Rechnung „nicht ganz einwandfrei“ ist und im Widerspruch zu dem in der Einleitung angegebenen Arbeitsziel (siehe die Anmerkung auf S. 405) wird festgestellt, daß auch die Gültigkeit ihrer Ableitung nur auf „kleine“ Ablenkungen, d. h. genauer gesagt, auf solche dritter Ordnung in x, y, x', y' und der Strahlablenkung Y_1 beschränkt ist¹⁸⁾. Trotzdem werden die durch die unzulässige Mitnahme der Glieder höherer Ordnung sehr langwierigen Formeln weiter aufrecht erhalten. Ihre Mitnahme bedingt, daß die Fehlerausdrücke in den Größen x, y, x', y' und Y_1 nicht die gleiche Größenordnung haben¹⁸⁾.

¹⁷⁾ Glieder zweiter Ordnung kommen nicht vor. Es möge nochmals bemerkt werden, daß unsere Auffassung über die Größenordnung der einzelnen Entwicklungsglieder eine andere ist als bei Picht und Himpan. Für diese Autoren ist die Potenz der einzelnen Glieder in x und y gleichbedeutend mit ihrer Größenordnung, während für uns das auf S. 399 f. Gesagte gilt.

¹⁸⁾ Es entsprechen einander im folgenden die Bezeichnungen $\beta_j, \alpha_j \rightarrow a_j; x, y, x', y' \rightarrow x, y, x', y'$ und $y_d \rightarrow Y$ in P—H II (1941) bzw. Z. Ph. (1936). Ferner wird in P—H I und II (1941) unter der „Ordnung“ eines Abbildungsfehlers immer diejenige in bezug auf x, y, x', y' verstanden (ohne Rücksicht auf die Potenz der Ablenkung), während wir unter „Ordnung“ stets diejenige in bezug auf x, y, x', y' und Y_1 meinen. Die oben erwähnten Abbildungsfehler „dritter Ordnung“ würden daher in unserem Sinne solche fünfter Ordnung sein. Da sie jedoch in unkorrekter Weise mittels der Ablenkung erster Ordnung (d. h. der idealen Ablenkung) berechnet wurden, sind sie als „Abbildungsfehler fünfter Ordnung“ unrichtig. Man hat sie einfach in dem Ausdruck für Δx und Δy in P—H II (1941) zu streichen.

Die so von den Verfassern erhaltenen Formeln 7₁₁–9₁₁ auf S. 443 und 444, P–H II (1941), welche allein bei einwandfreier Rechnung auftreten können, stimmen nun mit unseren Bildfehlerkoeffizienten (48) Z. Ph. (1938) bzw. (65) dieser Arbeit überein, wenn man sie 1. auf ein rein elektrisches Ablenkkfeld ($H_0 = 0$, $H_z = 0$) und 2. auf fehlendes Streufeld ($E_z = 0$) spezialisiert. Die Fehlerausdrücke $\beta_1, \beta_2 \dots \alpha_1 \dots \beta_1$ der Arbeit P–H I und II (1941) von Picht und Himpan sind also unsere Fehlerkoeffizienten a_1, a_2, \dots, a_3 aus der Arbeit Z. Ph. (1938) und zwar gilt

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_1, \quad \beta_2 = a_3, \quad \beta_3 = a_5, \quad \alpha_3 = a_4, \quad \beta_3 = a_{11}^{19}), \quad \beta_7 = a_{13}, \\ \alpha_3 &= a_{10}, \quad \beta_{11} = a_{13}, \quad \beta_{12} = a_8. \end{aligned} \quad (79)$$

Die weiteren in P–H II (1941) noch auftretenden 7 Glieder (10₁₁)–(10₁₁) welche in den Fehlerausdrücken Δx und Δy zu Gliedern fünfter Ordnung in x_s, y_s, x'_s, y'_s und Y_1 gehören würden, sind aus den oben angeführten Gründen zu streichen. Streicht man also noch die überzähligen Glieder, so gehen damit die endgültigen Formeln für die Bildfehler Δx und Δy in P–H II (1941), S. 439, Gl. (5) und Gl. (6) in diejenigen unserer Arbeit, Z. Ph. (1938) S. 366, Gl. (49) bzw. in Gl. (65) dieser Arbeit über.

Daß wir bei unserer Berechnung der Ablenkfehler nicht die Methode der schrittweisen Näherung, sondern das obige Störungsverfahren benutzt haben, hat folgende Gründe: 1. Diese Methode ist sehr übersichtlich und erfordert geringen Aufwand an formalem Rechnen. 2. Sie liefert sogleich die richtige Anzahl der Koeffizienten, indem sie unmittelbar die Koeffizienten liefert, welche in Δx und Δy gemeinsam vorkommen. (Dies ist außer der Einfachheit der Hauptvorteil jeder „Eikonalmethode“.) 3. Liefert sie die Fehlerkoeffizienten sogleich als einfache Integrale, ohne daß erst nötig ist, zweifache Integrale mittels partieller Integrationen in einfache Integrale überzuführen. Die angeführten Gründe waren offenbar auch für G. Wendt maßgebend, daß er diese Methode bei seinen weiteren Arbeiten über²⁰⁾ die Bildfehler bei der Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels in zwei gekreuzten Ablenkkfeldern und über²¹⁾ Fehler bei der Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels durch einfachsymmetrische Ablenkorgane benutzt hat.

In einer weiteren Veröffentlichung hat J. Picht²²⁾ an der Arbeit von G. Wendt²³⁾ bemängelt, daß in dem Ausdruck für Δx die Glieder

$$\frac{1}{2} (z_1 - z_0) x_s'^3 + \frac{1}{2} (z_1 - z_0) x_s'^2 y_s' \quad (80)$$

und in dem Ausdruck für Δy die Glieder

$$\frac{1}{2} (z_1 - z_0) y_s'^3 + \frac{1}{2} (z_1 - z_0) x_s' y_s'^2 \quad (81)$$

fehlen. Es sind dies jene Glieder, welche auf S. 402 dieser Arbeit in der Anmerkung angeführt sind. Picht schreibt hierzu weiter auf S. 62 in Anm. 2):

¹⁹⁾ Wenn man den bei P–H II (1941) irrtümlich fehlenden Ausdruck $-(y_s')_b = (-Y_s')$ hinzufügt.

²⁰⁾ G. Wendt, Z. Physik 118, 593 (1941).

²¹⁾ G. Wendt, Z. Physik 119, 423 (1942).

²²⁾ J. Picht, Ann. Physik 43, 62 (1943).

²³⁾ G. Wendt, Z. Physik 118, 593 (1941).

„Bei diesen vier oben angegeben Gliedern, die (je zwei) in den Ausdrücken für Δx und Δy fehlen, handelt es sich um Größen, die eigentlich nicht auftreten dürften oder doch nachträglich wieder fortfallen müßten und in der Arbeit P-H I, in der sie zunächst auch auftreten, sich tatsächlich später wieder gegen entsprechende Größen fortheben. Bei der auf W. Glaser zurückgehenden und von G. Wendt in der Arbeit W II angewandten Berechnungsmethode heben sich jene Größen aber nicht fort. Da ihr Nichtfortfallen aber zu falschen Ergebnissen führt, werden sie in W II (und auch in Arbeiten von W. Glaser²⁴⁾) stillschweigend ohne nähere Begründung fortgelassen. Dementsprechend habe ich jene Größen zwar in der nachstehenden Gleichung (26) noch aufgeführt, später aber nicht mehr berücksichtigt. Es soll hier nicht näher darauf eingegangen werden, warum die von W. Glaser vorgeschlagene Berechnungsmethode zu dem durch das Auftreten jener Glieder in Δx und Δy bedingten falschen Ergebnis führt“.

Wie aus obigem wohl klar ist, haben die angeführten Glieder mit dem Störungsverfahren als solchem nichts zu tun. Das Glied $-\frac{1}{8}(x_s'^2 + y_s'^2)^2$, welches von der Entwicklung von $\sqrt{1+x'^2+y'^2}$ für den unabgelenkten Strahl herrührt, wurde in F_4 deshalb „stillschweigend“ weggelassen, weil es nicht zur Störungsfunktion gehört. Da also E_4 das Glied $-\frac{1}{8}(x_s'^2 + y_s'^2)^2(z_1 - z_0)$ nicht enthält, treten nach (61) in Δx und Δy obige Glieder nicht auf.

²⁴⁾ Bei der Arbeit, welche hier zwar angegriffen aber nicht zitiert wird, handelt es sich um die schon mehrfach erwähnte Arbeit vom Jahre 1938 [(Z. Physik 111, 357 (1938))], in welcher die Ablenkfehler bereits berechnet worden sind.

Wien, Lehrkanzel für angewandte Physik der Technischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 28. November 1943.)

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74
für den Anzeigenteil: Kurt Klimmer (Arbeitsgemeinschaft medizinischer

Verlage G. m. b. H.), Berlin C 2, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 42 30 97

für den Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 63 105, 63 781
(1) Paul Dünhaupt, Köthen L 27

Lizenz-Nr. 410 / G. N. 446

ir Ax
r doch
auch
ei der
ndten
Nicht-
n Ar-
Dem-
auf-
angen
durch

Stö-
s von
führt,
ungs-
hält,

s sich
)], in

.